

Определение определённого интеграла.

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана некоторая функция $f(x)$. Эта функция, которая принимает конечные значения в каждой точке промежутка.

Число $a < b$, тогда определений интеграла от $f(x)$ по $[a, b]$. Называется число которое вычисляется по определённому интегралу.

Обозначим для краткости I и запишем алгоритм вычислений.

1. Разбиение промежутка $[a, b]$ на n участков точками,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

к-й: $[x_{k-1}, x_k]$ и его длина: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Главная характеристика разбиения называется ранг разбиения. Ранг разбиения:

$$\lambda = \max \Delta x_k \text{ (наибольшая из длин разбиения).}$$

2. На каждом учаске разбиения выбираем точку произвольным образом на $[x_{k-1}, x_k]$.

ξ - «кси» и считаем $f(\xi_k)$

3. Строим сумму (интегральную)

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Интегральная сумма зависит от четырёх вещей, от $f(x)$, от $[a, b]$, от способа разбиения и от выбора точки ξ_k .

4. Переход к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ ($\Rightarrow n \rightarrow \infty$)

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = I$ - не зависит от способа разбиения и от выбора точки ξ_k , то этот предел

называется определённым интегралом и обозначается символом интегралла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Если интегралл существует, то такая функция называется интегрируемой или суммируемой по промежутку $[a, b]$.

Простейшие свойства определённого интегралла

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$
 $\underbrace{c}_{c = \text{const}}$

a) $c=0 \Rightarrow \int_a^b 0 dx = 0$

b) $c=1 \Rightarrow \int_a^b dx = b-a$ - длина промежутка.

Остальные доказательства для самостоятельной работы.

2. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$, если f и g — интегрируемы.

3. Если $f(x)$ — интегрируема, то интегрируема любая функция, которая включается постоянным множителем, причем интегралл от этой функции равняется c на интегралл о исходной.

$$g(x) = cf(x)$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

2 и 3 свойства называются свойствами линейности.

4. Свойство аддитивности.

Пусть точки a , c и b связаны таким соотношением: $a < c < b$ и пусть $f(x)$ интегрируема и по $[a, c]$, и по $[c, b]$, и по $[a, b]$.

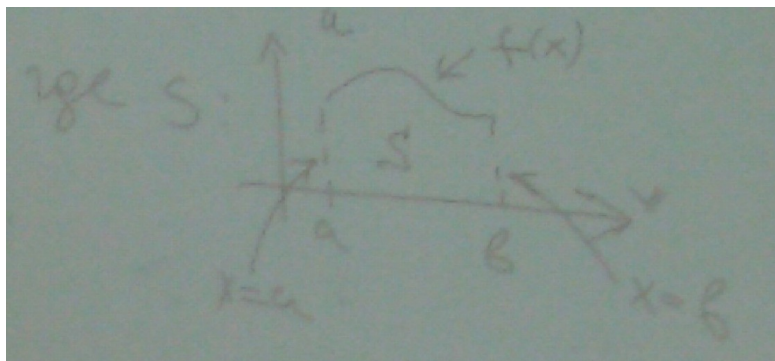
Тогда
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Геометрический смысл

Состоит в том, что определённый интеграл даёт некоторую площадь фигуры. А именно, криволинейной трапеции.

Пусть $f(x) \geq 0$ и пусть $f(x)$ на $[a, b]$

Тогда
$$\int_a^b f(x) dx = S$$



Доказательство может быть применено и для любой другой функции.

Теорема:

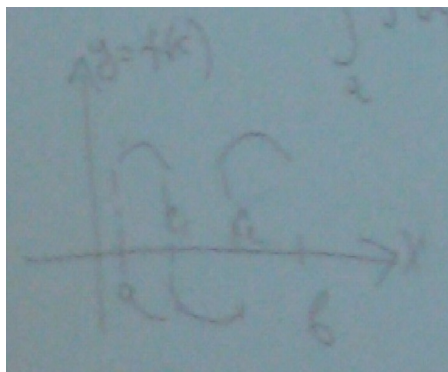
Если функция непрерывна на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема на этом промежутке.

$f(x)$ — непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ существует
$$\int_a^b f(x) dx$$

Если функция $f(x)$ кусочно интегрируема на промежутке $[a, b]$, то она тоже интегрируема на этом промежутке.

Функция называется кусочно-непрерывной, если у неё на промежутке $[a, b]$ конечное число разрывов первого рода.

Так как
$$\int_a^b f(x) dx$$
 — существует



c_1 и c_2 — точка разрыва

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx$$

Замечания

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$, если $f(a)$ - конечная
2. $\int_b^a f(x) dx = (a < b) = - \int_a^b f(x) dx$
 \Rightarrow обобщение свойства аддитивности для любой точки $a_1; b_1; c$
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, если все интегралы существуют.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема Барроу.

Пусть $f(x)$ — непрерывна на $[a, b]$, $a < x < b$

Рассмотрим $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$

Теорема(Барроу):

У этой функции существует производная и эта производная равна подинтегральной функции в точке до верхнего предела. $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство:

Доказательство опирается на теорему у «среднем». Следствием из этой теоремы Барроу является теорема Ньютона-Лейбница.

Следствие:

Формула Ньютона-Лейбница, способ вычисления определённого интегралла.

Пусть $f(x)$ на $[a, b]$, пусть

$$F(x): F'(x) = f'(x)$$

т. е. $F(x)$ — непрерывная для $f(x)$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

символ подстановки

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$