Теорема о «среднем»

Пусть на $[a,b]$ заданы две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ при чем $g(x)$ сохраняет знак. Тогда существует точка с, внутренняя точка промежутка, $a<c<b$, такая что $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(x)\int_a^b g(x)dx$

Комментарий:

Если $g(x)\equiv 1$, то $\int_a^b f(x)dx=f(x)(b-a) \Rightarrow f(c)=\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{сред.\ зн.\ ф-ии\ на\ [a,b]}$

Геометрическая интерпретация:

$f(x)>0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=S$

(img_0) $f(c)(b-a)=S_{трап}$

Существует хотя-бы одна точка, чтобы площадь прямоугольника совпадала с площадью криволинейной трапеции.

Доказательство теоремы о среднем опирается на теорему Больцано-Коши.

Доказательство теоремы Барроу $f(x)$ — непрерывна на $[a,b]$.

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \Phi'(x)=f(x)$

Пусть $\Delta x>0$, тогда $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$,

$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

По теореме аддитивности $=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f-\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt=x+\Delta x=-f(c)|\Delta x|=f(c)\Delta x$

$\Rightarrow \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(c)\rightarrow f(x)$

Физический смысл определённого интеграла

1. Если $f(x)$ — плотность распределения массы стержня $[a,b]$,то $m=\int_a^b f(x)dx$ - масса стержня
2. Если $f(x)$ — плотность заряд зарядов тонкого стержня $[a,b]$, то $q=\int_a^b f(x)dx$ — заряд стержня

Интегрирование зарядов

1. $f(x)\geq 0$ на $[a,b](a<b)$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

2. $f(x)\geq g(x)$ на $[a,b]$

Тогда $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

Для доказательства надо ввести $\varphi(x)=f(x)-g(x)=0$

Первая и вторая теоремы верны для любых интегрируемых функций.

3. $f(x)>0$ и непрерывная на $[a,b]$

тогда $\int_a^b f(x)dx>0$ $\Rightarrow$ $f(x)\geq m$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$

4. $f(x)>g(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывна на $[a,b]$

тогда $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$

Геометрические приложения определённого интеграла

1. Вычисление площадей

а) Площадь криволинейной трапеции $f(x)>0$ $\Rightarrow$ $S=\int_a^b f(x)dx$

(img_1.1)

б) (img_1.2)

$\Rightarrow S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

Пример:

(img_2) $y=\sqrt[n]{x}$

$y=x^n$

n — любое натуральное число ≥ 2

$$S=\int_0^1 (x^{\frac{1}{n}}-x^n)dx=\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S=1$

2. (img_3) $y=-x^2+2\mathrm{x}+3$

$y=x+1$

$-x^2+2\mathrm{x}+3=x+1$

$x^2-x-2=0$

$x_1=2$, $x_2=-1$

$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+2\mathrm{x}+3-x-1)dx=$ $x_1=2$, $x_2=-1$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\mathrm{x})\Big|_1^2=(-\frac{2}{3}+2+4)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)=-3+7.5=4.5$$

Вычисление площадей полярных координат

Пикартовы координаты — это два числа (r и φ)
(img_4)
φ — угол поворота от полярной оси до направления на точку m
$r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi \leq \varphi < \pi$)
Любая точка плоскости, кроме самого точки O
тока $0 \leftrightarrow r = 0$
Полярная система координат удобна для фигур, которые представляют собой круг или части круга. В частности площадь удобно вычислять для так называемого криволинейного сектора.

Площадь криволинейного сектора

(img_5) Криволинейным сектором называется фигура, которая ограничена двумя лучами, выходящими из полюса, например первый луч под углом α , второй луч под углом β , а с третьей стороны задаётся уравнением $R(f)$. $R(f)$ задает расстояние до точки кривой по лучу, проходящему под углом π .

$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} R^2(\varphi) \, d\varphi$ - формула для площади криволинейного сектора.

Между полярными и пикартовыми координатами удобно для разных задач устанавливать какие-нибудь взаимоотношения.
1. (img_6.1)
$x = r \cos\varphi$
$y = r \sin\varphi$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{2} \end{cases}$

2. (img_6.2)
$x - a = r \cos\varphi$
$y = r \sin\varphi$ $\Rightarrow$ и так далее.

Пример
(img_7)
$y = \sqrt{R^2 - x^2}$
$S = \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$
$R(\varphi) = R$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} R^2 \, d\varphi = \frac{R^2}{2} \varphi |_0^{\pi} = \frac{\pi R^2}{2}$