Для определителей верны две теоремы:

- Теорема замещения
- Теорема аннулирования

Теорема замещения

Если для определителя написать теорему разложения в каком-то виде.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & .. & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{vmatrix} = a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \ldots + a_{kn} A_{kn}$$

заменить элементы $k-той$ строки какими-то другими числами(a_ki на b_i), то получится следующее равенство:

$$b_1 A_{k1} + b_2 A_{k2} + \ldots + b_n A_{kn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема аннулирования

Если вместо чисел b поставить элементы другой, не $k-той$ строки, то есть получится, что алгебраические дополнения умножаются на элементы не свои, а чужие.

$$a_{m1} A_{k1} + a_{m2} A_{k2} + \ldots + a_{mn} A_{kn} = 0 \quad , \quad m \neq k$$

На месте строки с номером k , появятся элементы с номером m , раз номер m где-то присутствует, то существует две разных строки и определитель равен 0.

Эти теоремы верны и для строк, и для столбцов.

Теорема Крамера

Рассмотрим систему, где количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$\dots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n$$

Пусть $\Delta = det\, A \neq 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad \text{, где} \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{n1} \\ a_{21} & b_2 & a_{n2} \\ a_{31} & b_3 & a_{n3} \end{vmatrix}$$

Доказательство: $\Delta \neq 0$ тогда существует и единственное решение в матричной форме $A^{-1} \Rightarrow$ существует единичное решение: $X = A^{-1} B$

Обозначим элементы $A^{-1} c_{ik}=\frac{A_{ki}}{\Delta}$, тогда x_1 равен сумме произведений, где элементы первой строки обратной матрицы умножаются на правые части b .

$x_1=c_{11} b_1+c_{12} b_2+\ldots+c_{1n} b_n=\frac{A_{11}}{\Delta} b_1+\frac{A_{21}}{\Delta} b_2+...+\frac{A_{n1}}{\Delta} b_n=\frac{1}{\Delta}(b_1 A_{11}+b_2 A_{21}+...+b_n A_{n1})$, здесь алгебраические дополнения первого столбика умножаются на числа b , по теореме замещения такая сумма произведения равняется Δ_1 , заменится первый столбик на числа b .

Аналогично получается для остальных неизвестных.

Метод Гаусса
(метод исключения неизвестных)

Пример:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-3x_3=4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$-8x_2=-8 \Rightarrow x_2=1$$

$$-5x_2+3x_3=-8 \Rightarrow -5+3x_3=-8 \Rightarrow x_3=-1$$

$$x_1+2+1=4 \Rightarrow x_1=1$$

Ранг матрицы и его свойства

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim m \times n$

Рассмотрим её миноры.

Определение:

Рангом матрицы называется порядок минора, отличного от нуля, при условии, что все миноры более высоких порядков равны нулю.

Рангом обозначается: $rang\, A$ либо $r(A)$, A — матрица, $rang$ — некоторое число.

Примеры:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim 2 \times 3$

   $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1 \neq 0 \Rightarrow r(A)=2$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \dots 2 \times 3$

$$M=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0 \quad , \quad M_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0 \quad , \quad M_3=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$$

$m_1=1\neq 0, m_2=2, m_3=1$ и так далее, это означает, что $rang=1$

3. $3.\,A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 5 & 8\end{pmatrix}\sim 3\times 3$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 5 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 11\\ 0 & 7 & 11\end{vmatrix}=0$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3+4=7\neq 0\Rightarrow r(A)=2$$

Свойства ранга матрицы

1. $A\sim m\times n\Rightarrow r(A)\leq \min\{m, n\}$
2. $rang\,0=0$
3. $rang\,A=rang\,A^T$
4. Не меняется при элементарных преобразованиях
   Элементарными преобразованиями называются:

   - прибавление одной строки к другой
   - умножение строки на число не равное 0
   - перестановка строк
   - добавление или вычёркивание нулевой строки
   - транспонирование матрицы, тогда то, что было написано для строк, верно и для столбцов

Элементарные преобразования входят в процедуру Гаусса. С помощью процедуры Гаусса, мы можем преобразовать её так, что ранг её станет очевиден.

Пример: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 7 & 9\end{pmatrix}\sim 3\times 4\,(r(A)\leq 3)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\end{vmatrix}=-5\neq 0\Rightarrow r(A)=2$$

Система общего вида и теорема Кронекера-Капелли

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\ldots a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \quad \Leftrightarrow AX=B$, где

$$A=\begin{matrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{matrix}\sim m\times n$$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ bx_n \end{pmatrix}$ Введём расширенную матрицу

$\bar{A} \sim m \times (n+1)$

Для того, чтобы у системы существовало решение, необходимо и достаточно, когда ранг матрицы коэффициентов совпадает с рангом расширенной матриц(решение может быть не единственным).

1. $rang\ A, rang\ \bar{A} \Rightarrow решений\ нет$
2. $rang\ A = rang\ \bar{A} = n \Rightarrow решение\ единственное$
3. $rang\ A = rang\ \bar{A} = r < n \Rightarrow решение\ не\ единственное$

   и решение зависит от свободных параметров(их количество $n-r$)). Свободные параметры могут принимать любые значения, поэтому они называются свободными.

Пример:

1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ A = rang\ \bar{A} = 2$$

$7x_3 = -7 \Rightarrow x_3 = -1$

$x_1 + x_2 + 2 = 4$

$x_1 + x_2 = 2$

$x_2 = t$ — любые значения

$\Rightarrow x_1 = 2 - t$

2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{rang\ A}_{=2} = rang\ \bar{A} = 3$$

$\Rightarrow решений\ нет$. Последняя строчка означает невозможное равенство: $0=1$.