Уравнения высших порядков

Уравнения допускающие понижение порядка

Пример:

$y''+y'=0 \quad y(x)-?$ формально это уравнение второго порядка

Пусть $y'=z(x)$, тогда $y''=z'$

$z'+z=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=-z$

$\frac{dz}{z}=-dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z|=-x+\ln c \quad \Rightarrow \quad z=c e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y'=c e^{-x} \quad \Rightarrow$

$y=-c e^{-x}+c_z=c_1 e^{-x}+c_z$

Этот пример соответствует первому типу уравнений, которые допускают понижение порядка.

1. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0 \quad k\geq 1$ - это уравнение, которое не зависит явно от неизвестной функции и некоторых её первых производных.

Пусть $z(x)=y^{(k)}$, мы делаем замену, через производную минимального порядка, входящую в уравнение.

Тогда

$$z'=y^{(k+1)}$$
$$z''=y^{(k+2)}$$
$$\ldots$$
$$z^{(n-k)}=y^{(n)}$$

$\Rightarrow \quad F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0$ - получилось уравнение более низкого порядка (n-k)

Можем получить общее решение в виде некоторой функции которая состоит из x и набора некоторых постоянных.

Пусть $z(x)=\varphi(x, c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{n-k})$ - общее решение

Тогда $y^{(k)}=\varphi(x, c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{n-k})$

$y^{(k-1)}=\int \varphi(x, c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{n-k})dx=\varphi_1(x, c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{n-k})$, где $\varphi_1'=\varphi \quad \Rightarrow$

$y^{(k-2)}=\varphi_2(\ldots)+c_{n-k+1}x+c_{n-k+2}$, где $\varphi_2'=\varphi_1$ интегрируя дальше, мы окончательно получим ответ. И так далее $y=\varphi_k(\ldots)+p_k(x)$ будет многочлен степени $k-1$ с коэффициентами которые зависят от произвольных постоянных.

2. $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ Уравнение, которое не зависит явно от аргумента x

Такое уравнение допускает понижение порядка на 1.

Введём $p(y)=y'$

Тогда $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'(y)\cdot p(y)$

$y'''=\frac{d(p' p)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(p'' p+p' p')p=p'' p^2+(p')^2 p$ и так далее $y^{(n)}$, то есть производная первого порядка выражается через какое-то выражение, куда входят уравнения с порядком $n-1$ и меньше.

$\Leftrightarrow \Phi(y, p(y), p'(y), \ldots, p^{(n-1)}(y))=0$

Пусть $p(y)=\psi(y, c_{1,} c_{2,} \ldots, c_{n-1})$ - общее решение

$\Rightarrow \quad y'=\psi \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\psi(y, c_{1,}\dots, c_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\psi(y...)}=dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\psi(y,\dots)}=x+c_n$, где $\psi'=\frac{1}{\psi}$

Пример:

$y''y=y^2$

$p(y)=y' \quad \Rightarrow \quad y''=p'p$

$p'py=p^2 \quad \Rightarrow \quad p(p'y-p)=0$

1) $p=0 \quad \Rightarrow \quad y'=0 \quad \Rightarrow \quad y=c$

2) $p'y=p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy}y=p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$

$\ln p=\ln y+\ln c_1 \quad \Rightarrow \quad p=c_1 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=c_1 y$

$\frac{dy}{y}=c_1 dx$

$\ln y=c_1 x+\ln c_2$, $\quad y=c_2 e^{ax}$

Кроме этих двух типов есть ещё только один, третий тип.

Линейные уравнения второго порядка

1. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ - однородное
2. $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ - неоднородное

1. Линейное однородное уравнение

Введём понятие оператора. Оператором в математике называется математический объект, который производит какую-то операцию, то есть действие.

Например:

$\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования

$y'=\frac{d}{dx}y$

Для уравнения второго порядка мы введём оператор L .

$L=\frac{d^2}{dx}+p(x)\frac{d}{dx}+q(x)$

Этот оператор называется линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Свойства линейности:

1. $L(cy)=c\,Ly$, постоянный коэффициент можно выносить из-под знака оператора.

   Доказательство: $L(cy)=\frac{d^2}{dx^2}(cy)+p(x)\frac{d}{dy}(cy)+q(x)cy=cy''+cp(x)y'+cq(x)y=$
   $=c(y''+p(x)y'+q(x)y)=cL(y)$
2. $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$

Следствие для однородного уравнения.

Если $y_{1,}y_{2,}\dots,y_n$ являются решениями, а $c_{1,}c_{2,}\dots,c_n$ — постоянными, то

$y=c_1 y_1+c_2 y_2+...+c_n y_n$ - тоже решения

Доказательство: $L(y)=L(c_1 y_1+c_2 y_2+\ldots+c_n y_n)=\underbrace{c_1 L(y_1)}_{=0}+\underbrace{c_2 L(y_2)}_{=0}+\ldots+\underbrace{c_n L(y_n)}_{=0}=0$

Определение. выражение: $c_1 y+c_2 y+\ldots+c_n y$ — называется линейной комбинацией функции $y_{1,} y_{2,}\ldots y_n$
Функции $y_{1,} y_{2,}\ldots, y_n$ называются линейно независимыми, если из условия $c_1 y_1+c_2 y_2+\ldots+c_n y_n=0$ следует условие, что все коэффициенты обязаны равняться нулю: $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$. В противном случае, функции называются линейно зависимыми.

Примеры

1. $y_1=\sin_x$ — линейно независимые
   $y_2=\cos x$
   $0\equiv 0, \sin x+c_2\cos x=\cos x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(x+\varphi)$
   $\cos(x+\varphi)=\cos x\cos\varphi-\sin x\sin\varphi$
   $$\varphi:\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\dfrac{c^2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{-c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\end{array}\right\}$$
2. $y_1=1$
   $y_2=x$
   $y_3=x^2$ — линейно независимые
   $\ldots$
   $y_n=x^n$

В случае двух функций понятия линейной зависимости и независимости сводится к пропорциональности, а именно, две функции линейно зависимы тогда, когда они пропорциональны.
y_1 и y_2 линейно зависимы, тогда, когда $k\neq 0$ $y_1=ky_2$ или $y_2=ky_1$
Для линейной независимости двух функций надо, чтобы их отношение не зависело от их отношения.
$$\frac{y_1}{y_2}\neq const$$

Теорема об общем решении
Уравнение **1** ($L(y)=0$)
$y_{общ}=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а y_1 и y_2 — линейно независимые любые частные решения

Пример
$y''+y'=0$
$y_1=1$ - подходит так как $y_1'=0$ $\Rightarrow$ $y_1''=0$
$y_2=x$ - не подходит, так как $y_2'=1$ $\Rightarrow$ $y_2''=0$, $0+1\neq 0$
$y_2=e^{-x}$
$y_2'=-e^{-x}, y_2''=e^{-x}$
$y_2''+y_2'=e^{-x}-e^{-x}\equiv 0$ $y_{общ}=c_1+c_2 e^{-x}$