I. $\dfrac{A}{x-a}$

II. $\dfrac{A}{x-a^k}$

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$

IV. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q^k}$

$p^2-uq<0$

Интегрирование простейшей дроби третьего типа

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}$$

$p^2-uq<0$

$$x^2+px+q=\underbrace{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{u}}_{(x+p/2)^2}-\frac{p^2}{u}+q=(x+p/2)^2+m^2 \quad \text{, где} \quad m^2=q-\frac{p^2}{u}>0$$

$$t=x+\frac{p}{2}\Rightarrow dA\,dx$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+m^2}\,dt=M\int \frac{tdt}{t^2+m^2}+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+m^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+m^2)+\frac{N-\frac{MP}{2}}{m}arctg\frac{t}{m}+c=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2\mathrm{N}-MP}{2\mathrm{m}}arctg\frac{2\mathrm{x}+p}{2\mathrm{m}}+c=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2\mathrm{N}-MP}{\sqrt{4\mathrm{q}-p^2}}arctg\frac{2\mathrm{x}+p}{\sqrt{4\mathrm{q}-p^2}}+c$$

$$m=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\frac{4\mathrm{q}-p^2}{2}}\Rightarrow 2\mathrm{m}=\sqrt{4\mathrm{q}-p^2}$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\mathrm{x}+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$t=x+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=dx$$

Дроби четвёртого типа интегрируются значительно сложнее. Идея состоит в том, что мы стараемся понизить степень знаменателя и доводим до того, что эта степень становится равной единице и тогда получается дробь третьего типа, которую понятно как интегрировать.

Пример дроби четвертого типа:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{(1+x^2)dx}{(x^2+1)^2}-\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{x\cdot xdx}{(x^2+1)^2}$$

Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int \frac{x\cdot xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{-x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{-x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctg\,x=\int \frac{(1+x^2)dx}{(x^2+1)^2}-\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\int \frac{dx}{x^2+1}-\int \frac{x\cdot xdx}{(x^2+1)^2}=arctg\,x+\frac{x}{2}(x^2+1)-\frac{1}{2}arctg\,x+c=\frac{1}{2}arctg\,x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c$$

$$u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx$$

$$dv=\frac{xdx}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad v=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{-1}{(x^2+1)^2}\cdot 2\mathrm{x}$$

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Любую правильную рациональную дробь можно разложить в сумму простейших. И тогда интегрирование любой правильной рациональной дроби будет сводиться к интегрированию этой суммы простейшей.

Примеры:

1. $$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

Разложение обязано иметь такой вид с какими то коэффициентами А и В

$$\frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4} \quad =$$

$$\Rightarrow A(x+2)+B(x-2)=1$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; 4\mathrm{A}=1 \;\Rightarrow\; A=\frac{1}{4}$$

$$x=-2 \;\Rightarrow\; -4\mathrm{B}=1 \;\Rightarrow\; B=\frac{-1}{4}$$

$$=\frac{1/4}{x-2}-\frac{1/4}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$$

Этот пример на случай когда корни знаменателя вещественные и простые, то есть скобки стоят в первой степени.

2. $\int \frac{(x-2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$

$$\frac{x-2}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$
$$x-2=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)$$
$$x=1 \Rightarrow -1=4A \Rightarrow A=-1/4$$
$$x=-1 \Rightarrow -3=c\cdot(-2) \Rightarrow c=3/2$$
$$x=0 \Rightarrow -2=A-B-C \Rightarrow B=A-C+2=1/4$$
$$\int \frac{(x-2)dx}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{-1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+c=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+c$$

3. $\int \frac{dx}{x^3-1}$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$
$$1=A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)$$
$$x=1 \Rightarrow 1=3A \Rightarrow A=1/3$$
$$x=0 \Rightarrow 1=A+N(-1) \Rightarrow N=-2/3$$

Можно использовать метод приравнивая коэффициентов при равных степенях

$$x^2: 0=A+M$$
$$M=-A=-1/3$$

$$\int \frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx$$
$$\frac{-1}{3}\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}=\frac{-1}{3}\int \frac{(t+3/2)dt}{t^2+3/4}=\frac{-1}{3}\int \frac{tdt}{t^2+3/4}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3/4}=$$
$$=\frac{-1}{6}\ln(t^2+3/4)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{-1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln x^2+x+1-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$t=x+1/2 \Rightarrow dt=dx$$

Разложение дроби на простейшие, связано с разложением знаменателя дроби на множители.
Если знаменатель $P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \ldots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$

$$k_1+\ldots+k_n+2l_1+\ldots+2l_t=n$$
$$\Rightarrow \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-x_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2}+\ldots+A_{k_1}^{(1)}+\ldots+\frac{A_1^{k_n}}{x-x_n}+\frac{A_2^{k_n}}{(x-x_n)^2}+\ldots+A_k\ldots\ldots\ldots$$