Функции нескольких переменных

Для функции многих переменных определение тоже самое, только областью определения является многомерное множество.

Функция двух переменных — это закон сопоставления некоторого двумерного множества D в какое-то одномерное множество.
$\Rightarrow z=f(x,y)$

Двумерное множество D состоит из точек, у которых две координаты x и y, а то одномерное множество, которое является областью значений состоит из точек, которое мы обозначаем буквой z. Геометрическое изображение, или график функции двух переменных, можно получить в трёх мерном пространстве систему координат. Тогда множество D изобразится на плоскости, а графиком функции будет некоторая поверхность в трёхмерном пространстве. Координаты точек вычисляются с помощью функций.

Примеры

1. $x+y+z=1 \;\Rightarrow\; z=1-x-y$
2. $Ax+By+Cz+D=0 \;\Rightarrow\; \text{плоскость}$, $A,B,C\neq 0$

Пределы плоскостей второго порядка

1. $z=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; z\geq 0$, $z=const \;\Rightarrow\; \text{окружность}$, вертикальные сечения являются параболой($x=const \;\Rightarrow\; \text{парабола}$, параболоид вращения)
2. $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, тогда поверхность в горизонтальном сечении будет иметь эллипсы. Называется Эллиптический параболоид.
3. $x^2+y^2=R^2$
4. $y+x^2=0 \;\Rightarrow\; y=-x^2$
5. $z^2=x^2+y^2$
6. $z^2=\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ — эллипс
   $y=0\Rightarrow z^2=x^2\Rightarrow z=\pm y$
7. $R^2=x^2+y^2+z^2$ — сфера радиуса R
   $z=\sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}$
8. $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ - эллипсоид
   В такой поверхности все сечения являются эллипсами.
9. $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}=1$
   $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}$
10. $\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \;\Rightarrow\; z^2\geq c^2$ - двухполосной гиперболоид
11. Тор = «бублик»
12. «Летающая тарелка»
    $z^2+x^2+y^2=R^2 \qquad (z-1)^2+x^2+y^2=R^2$

Предел или непрерывность функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в окресности точки с координатами $(x_{0,}y_0)$.
Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при $x\rightarrow x_{0,}y\rightarrow y_0$. (
$A=\lim_{x\rightarrow x_0;y\rightarrow y_0} f(x,y)$), если для $\forall E>0\exists\delta\geq 0:\left\{\begin{matrix}|x-x_0|<\delta\\|y-y_0|<\delta\\x\neq x_0\\y\neq y_0\end{matrix}\right\}$

Для функции двух переменных можно ввести понятие повторных пределов

1. $\lim_{y\rightarrow y_0}(\lim_{x\rightarrow x_0}f(x,y))=A_1$
2. $\lim_{x\rightarrow x_0}\lim_{y\rightarrow y_0}f(x,y)=A_2$

Теорема:
Если $A=\lim_{x\rightarrow x_0;y\rightarrow y_0} f(x,y)$, то lim from {x rightarrow x_0}
Если существует предел для функции двух переменных, то существует повторные пределы.
Сохраняются теоремы о пределах.

Непрерывность

Определение: Пусть $f(x,y)$ определена в точке $(x_{0,}y_0)$ и её окрестности называются непрерывным в этой точке, если предел функции равен значению этой точки.
$\lim_{x\rightarrow x_0;y\rightarrow y_0} f(x,y)=f(x_{0,}y_0)$
Все элементарные функции непрерывны на своей области определения, сохраняются все теоремы о непрерывных функциях.

Дифференцирование

Частные производные

1. $f_x'(x_{0,}y_0)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_{0,}y_0)}{\Delta x}$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}=f_y'(x_{0,}y_0)=\lim_{\Delta\rightarrow 0}\frac{f(x_{0,}y_0+\Delta y)-f(x_{0,}y_0)}{\Delta y}$

Примеры

1. $z=xy\;\Rightarrow\;z_x'=y, z_y'=x$
2. $z=x^2+xy+y^2$
   $z_x'=2\mathrm{x}+y+0=2\mathrm{x}+y$
   $z_y'=0+x+2\mathrm{y}=x+2\mathrm{y}$
3. $z=x\sin(y^2\cdot x)$
   $z_x'=\sin(y^2x)+x\cos(y^2x)\cdot y^2$
   $z_y'=xcos(y^2x)\cdot 2\mathrm{yx}$