Теорема Ролля

Пусть на замкнутом промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, которая внутри промежутка, во всех точках, имеет производную $f'(x)$ при $x \in (a,b)$. Пусть $f(a)=f(b)$. Тогда $\exists (.) x_0 \in (a,b)$ (существует точка внутри промежутка (a,b)), такая что $f'(x_0)=0$. Мы говорим о том, что существует хотя-бы одна точка внутри промежутка.

Доказательство:

- $f(x)=c-const \Rightarrow f'(x)=0$, при $\forall x$
- если $f(x)$ не постоянная, тогда существует точка, когда $f(x)$ принимает экстремальное значение.
  Рис. 1

То, что существует экстремум хотя-бы в одной точке, следует из теоремы Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса описывает очень важные свойства функций непрерывных на отрезке.

О функциях непрерывных на отрезке
на замкнутом промежутке (a, b)

Определение: f(x) называется непрерывной на [a, b], если она непрерывна в каждой внутренней точке, а в двух крайних, выполняется следующее предельное соотношение:
$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)=f(b)$

Теорема Вейерштрасса.

Для функции непрерывной на [a, b], существуют точки, $(.) x_1 \in [a,b]$ и $(.) x_2 \in [a.b]$
Где эта функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Эти точки, x_1 и x_2, могут быть и на концах промежутка.

Пояснение:
рис. 2

Наибольшее значение непрерывной функции, на замкнутом промежутке, может достигаться в какой-то точке локального максимума, либо на конце промежутка.
Наименьшее значение непрерывной функции, на замкнутом промежутке, может достигаться в точке локального минимума, либо на конце промежутка.

Теорема Больцано-Коши

Фактически, это теорема о том, что графиком непрерывной функции является сплошная линия.
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, Обозначим $m=\min\limits_{x \in [a.b]} f(x)$, $M=\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, пусть эти функции не совпадают, тогда очевидно, что $m<M$. Тогда для любого числа l расположенного $m<l<M$, существует точка c, расположенная между $a<c<b$, такая, что $f(c)=l$.

Доказательство:
рис. 3

Определение острого экстремума

Определение:

$f(x)$, достигает в $(.)x_0$ острого экстремума, если в этой точке экстремум есть, а $f'(x_0)$ — не существует.

Определение:

$f(x)$ достигает в точке x_0 гладкого экстремума, если в этой точке экстремум есть и существует $f'(x_0)$, то есть существует касательная.

Рис. 4

Теорема Лагранжа

Является обобщением теоремы Ролля, и доказывается с помощью теоремы Ролля.
Пусть f(x) — непрерывна на [a, b] и дифференцируема внутри промежутка.
Тогда $\exists(.)c$: a < c < b, такая что
$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, формула Лагранжа

Геометрический смысл:
рис. 5

Доказательство:

Построим $g(x)=f(x)+\lambda x$, где $\lambda - ?$
Очевидно, $g'(x)=f'(x)+\lambda$
$g(a)=g(b)\Leftrightarrow f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$ $\Rightarrow\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}=-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\Rightarrow\exists(.)c$: a < c < b, такая что $g'(c)=0\Leftrightarrow f'(c)+\lambda=0\Leftrightarrow f'(c)=-\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Теорема Каши
(обобщение теоремы Лагранжа)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$ и внутри (a,b)
Пусть $g'(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$, то есть она принимает либо отрицательные, либо положительные значения.
Тогда $\exists(.)c$: $a<c<b$, такая что $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Доказательство:
Пусть $h(x) = f(x)+\lambda g(x)$,
$h'(x)=f'(x)+\lambda g'(x) = 0 \Rightarrow h'(c)=0 \Rightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = -\lambda$,
$h(a) = h(b) \Leftrightarrow f(a)+\lambda g(a) = f(b)+\lambda g(b)$

Найдём из этого равенства λ .

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Правило Ловпиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределённостей $(\frac{0}{0})$ или $(\frac{\infty}{\infty})$

Пусть f(x) и g(x) дифференцируемы в точке x_0

Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

(либо $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$)

Тогда $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0$

Примеры:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\cos x\,1=\cos 0=1$
2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0$
3. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$
4. $\lim_{x\to +\infty}¿\frac{x^2}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=0$
5. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{e^x}=0$, для $\forall n$
6. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$, для $\forall \alpha>0$

Если неопределённость видна $(0.\infty)$, то чтобы применить теорему Ловпитая выражение надо преобразовать $\lim_{x\to x_0} f(x)h(x)=?$, где $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f\frac{(x)}{g}(x) \quad \text{, где} \quad g(x)=\frac{1}{h}(x)\to\lim_{x\to 0}¿$$

Пример

$$\lim_{x\to +0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$