$y''+p(x)y'+q(x)y=0$

Теорема общего решения:

$y_{o.o.}=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, y_1 и y_2 — линейно независимые решения исходного уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.

Определитель Вронского(вронскиан) и его свойства

Определение:

Вронскианом, построенным из n функций $f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)$

Называется $W[f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)]=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1' & f_2' & ... & f_n' \\ & & ... & \end{vmatrix}$

В частности $W[f_1(x),f_2(x)]=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}=f_1f_2'-f_2f_1'$

Теорема:

Решение уравнения $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы тогда и только тогда когда $W[y_1(x),y_2(x)]=0$ ни в одной точке.

$\Leftrightarrow$ Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ $W[y_1(x),y_2(x)]\equiv 0$

Пример:

$y''+y=0$

$y_1(x)=sinx \Rightarrow y_1'=cosx$, $y_1''=-sinx \Rightarrow -sinx+sinx=0$, то есть y_1 - решение

$y_2(x)=cosx \Rightarrow y_2'=-sinx$, $y_2''=\cos x-cosx+cosx=0$, то есть y_2 - решение

$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix}=-\sin^2x-\cos^2x=-1\neq 0 \Rightarrow y_{o.o.}=c_1sinx+c_2cosx$

Уравнения с постоянными коэффициентами

$y''+py'+qy=0$, $p_1q-const$

Ищем решение в виде: $y=e^{kx}$, $k-?$ $\Rightarrow$ $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$

$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$

$e^{kx}(k^2+pk+q)=0 \Rightarrow k^2+pk+q=0$, получается квадратное уравнение для неизвестного числа k . Это называется характеристическим уравнение соответствующим исходным дифференциалам.

1) $D=p^2-4q>0 \Rightarrow k_1\neq k_2$ — вещественные корни

$y_1(x)=e^{k_1x}$, $y_2(x)=e^{k_2x}$

$W=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{k_1x}e^{k_2x}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}=(k_2-k_1)e^{(k_1+k_2)x} \Rightarrow y_{o.o.}=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$

Пример:

$y''+3y'+2y=0 \Rightarrow y_{o.o.}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

2) $D=0=p^2-4q$

$\Leftrightarrow \quad p^2=4q \quad \Rightarrow \quad k^2+pk+q=\left(k^2+2k\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(k+\frac{p}{2}\right)^2=0 \quad \Rightarrow$

$k_0=\frac{-p}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1(x)=e^{\frac{-p}{2}x}$

Можно взять функцию, которая от этой отличается только множителем x :

$y_2(x)=xe^{\frac{-p}{2}x}$

Проверим, что $y_2=xe^{\frac{-p}{2}x}$ — решение уравнения $y''+py'+qy=0$, где $p^2=4q$

$y_2'=e^{\frac{-p}{2}x}+x\left(\frac{-p}{2}\right)e^{\frac{-p}{2}x}=e^{\frac{-p}{2}x}\left(1-\frac{xp}{2}\right)$

$y_2''=\frac{-p}{2}e^{\frac{-p}{2}x}+\left(1-\frac{xp}{2}\right)\left(\frac{-p}{2}\right)e^{\frac{-p}{2}x}=e^{\frac{-p}{2}x}-\left(\frac{-p}{2}-\frac{p}{2}+\frac{xp^2}{4}\right)=e^{\frac{-p}{2}x}\left(-p+\frac{xp^2}{4}\right)$

$y_2''+py_2'+qy_2=e^{\frac{-p}{2}x}\left(-p+\frac{xp^2}{4}\right)+pe^{\frac{-p}{2}x}\left(1-\frac{xp}{2}\right)+\frac{p^2}{4}xe^{\frac{-p}{2}x}=e^{\frac{-p}{2}x}\left(-p+\frac{xp^2}{4}+p-\frac{xp^2}{2}+\frac{xp^2}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad y_{o.o.}=c_1e^{\frac{-p}{2}x}+c_2xe^{\frac{-p}{2}x}=e^{\frac{-p}{2}x}\left(c_1+c_2x\right)$

Пример:

$y''+4y'+4y=0 \quad \Rightarrow \quad y_{o.o.}=e^{-2x}\left(c_1+c_2x\right)$

$k^2+4k+4=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2$

3) $D=p^2-4q<0$

$\Rightarrow \quad k^2+pk+q=\left(k^2+2k\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+\underbrace{q-\frac{p^2}{4n}}_{\beta^2\beta>0}=\left(k+\frac{p}{2}\right)^2+\beta^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\beta=\alpha+i\beta$, где

$\alpha=\frac{-p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

$\Rightarrow \quad y_1(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}e^{\alpha x}e^{i\beta x}$

$y_2(x)=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$, где $e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$

$e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$

Лемма:

Если $y=u+iv$ — решение уравнения $y''+py'+qy=0$, где $p_1q-const(вещ.)$, то по отдельности являются решениями функции $u(x)$ и $v(x)$.

$\Rightarrow \quad u(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$

$v(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$

— они линейно независимы

$\Rightarrow \quad y_{o.o.}=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$

Пример:

$y''+2y'+5y=0 \quad \Rightarrow \quad k^2+2k+5=0$

$k^2+2k+1+4=0$

$(k+1)^2+4=0$

$k+1=\pm 2$

$k_{1,2}=-1\pm 2$

$\alpha=1 \quad , \quad \beta=2$

$\Rightarrow \quad y_{o.o.}=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

Уравнение Эйлера

$x^2y''+xpy'+qy=0 \quad , \quad p,q-const(\textit{вещественные})$

$\Leftrightarrow \quad y''+\frac{p}{x}y'+\frac{q}{x^2}y=0$, то есть $p(x)=\frac{p}{x}$

$q(x)=\frac{q}{x^2}$

$x=e^t \quad \Leftrightarrow \quad t=\ln x \quad \Rightarrow \quad y(x)=y(e^t)=\tilde{y}(t)$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\alpha\,\tilde{y}(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\tilde{y}(t)\cdot\frac{1}{x}=\tilde{y}'(t)e^{-t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=(\tilde{y}'\frac{(t)\cdot 1}{x})'_x=\frac{-1}{x^2}\tilde{y}'(t)+\frac{1}{x}\tilde{y}''(t)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}(-\tilde{y}'(t)+\tilde{y}''(t))^x$

$\Rightarrow \quad \tilde{y}''(t)-\underbrace{\tilde{y}'(t)+p\,\tilde{y}'(t)}_{(p-1)\tilde{y}'(t)}+q\,\tilde{y}(t)=0$

$\Rightarrow \quad k^2+(p-1)k+q=0 \quad \Rightarrow \quad D=(p-1)^2-4q$

1) $D>0$

Пример:

$x^2y''+4xy'+2y=0$

$x=e^t, t=\ln x \quad \Rightarrow \quad y(x)=\tilde{y}(t)$

$y'=\tilde{y}'(t)\cdot\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y''=\tilde{y}''(t)\cdot\frac{1}{x^2}+\tilde{y}'(t)\left(\frac{-1}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}''(t)-\tilde{y}'(t)+4\,\tilde{y}'(t)+2\,\tilde{y}(t)=0$

$\tilde{y}''(t)+3\,\tilde{y}'(t)+2\tilde{y}(t)=0$

$k^2+3k+2=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=-2 \quad , \quad k_2=-1$

$y_1(x)=y_1(t)=e^{-2t}=x^{-2} \quad ; \quad y_2(x)=\tilde{y}(t)=e^{-t}=x^{-1} \quad \Rightarrow \quad y_{o.o.}=\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x}$

2) $D=0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y_{o.o.}}(t)=e^{\alpha t}(c_1+c_2t)=x^{\alpha}(c_1+c_2\ln x)=y_{o.o.}(x)$

3) $D<0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y_{o.o.}}(t)=e^{\alpha t}(c_1\cos t+c_2\sin t)=x^{\alpha}(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x)=y_{o.o.}(x)$