Связь напряженности электрического поля, и потенциала этого поля
($\vec{E}$ и φ)

Электрическое поле характеризуется двумя характеристиками: вектора напряженности $\vec{E}$ и потенциал φ. Эти величины связаны.

Установим связь между этими величинами:

1. $\varphi(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}$, $\begin{matrix} \vec{F}=q\vec{E} \text{ — определение } \vec{E} \\ W=q\varphi \text{ — определение } \varphi \\ \vec{F}=-grad\,W \end{matrix}$ $\Rightarrow q\vec{E}=-grad\,q\varphi \Rightarrow \vec{E}=-grad\,\varphi$

   то есть

   $E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $E_y=-\frac{d\varphi}{d\,y}$; $E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ $\Rightarrow [E]=\frac{B}{м}$

   $\vec{E}$ направлен в сторону наибыстрейшего убывания потенциала

   $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности(линия) на которой φ постоянен

   Поверхность, состоящая из точек одинакового потенциала называется эквипотенциальной.

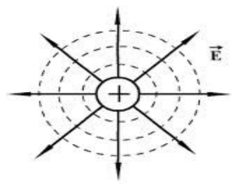


рис. 13.15

2. $\vec{E} \rightarrow (\varphi_1-\varphi_2)$

   Перенесём заряд q из точки 1 в точку 2 по какой-то траектории

   $dA=(\vec{F}\cdot d\vec{r})=F_r\,dr=qE_r\cdot dr$

   $dA=-dW$ — по определению $W_{пот}$

   $W_{пот}=q\varphi$

   $$\Rightarrow d(q\varphi)=qE_r\,dr \Rightarrow d\varphi=-E_r\,dr \Rightarrow \int_{(.)1}^{(.)2} d\varphi=-\int_{(.)1}^{(.)2} E_r\,dr \Rightarrow \varphi_2-\varphi_1=-\int_{(.)1}^{(.)2} E_r\,dr$$

   Зная напряженность, можно найти разность потенциалов.

   Замечание: Интеграл может вычисляться по любой траектории соединяющий точки 1 и 2. Так как сила консервативна, то ответы будут одинаковыми.

   Следствие: Если точки 1, и точки 2 совпадают, то интеграл превращается в циркуляцию. $((.)1\equiv(.)2) \Rightarrow \varphi_1-\varphi_2=0 \Rightarrow \oint_L E_r\,dr=0$

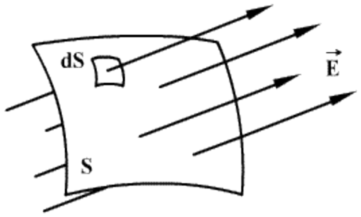
Поток вектора напряженности электрического поля.
Теорема Остроградского — Гаусса.

Определение:

Потоком вектора напряженности($\vec{E}$) электрического поля, через поверхность S называется $\Phi_e=\int_{(s)} E_n\,dS$, Φ_e — поток вектора напряженности. $\Phi_e \rightarrow \Phi$

E_n — проекция $\vec{E}$ на $\vec{n}(нормаль)$ к dS .

Пояснение:



$N_{площадок}$

ΔS

$i=1,\ldots,N$

$\Delta S_i\cdot E_{¿}=\delta\Phi_b$ - поток

$\Phi \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i=\sum_{i=1}^{N} E_{¿}\Delta S_i$

$$\Phi=\lim_{\substack{\Delta S_i\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}E_{\text{ni}}\Delta S_i=\int_{(S)}E_n dS$$

Частные случаи:

Поле однородное, а поверхность плоская. $\vec{E}=const$; $S-плоская$

$$\Phi=\int_{(S)}E_n d\,S=\int_{(S)}E\cos\alpha\,dS=E\cos\alpha\int_{(S)}dS=E\cos\alpha S=E\,S\cos\alpha$$

а) $\alpha=90$

б) $\alpha=0$

$\Phi=ES\cos 90=0$

$\Phi=ES$

Формулировка(для вакуума):

Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную, замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этих зарядов, деленное на электрическую постоянную.

$$\Phi_E=\frac{\sum_{i:\,внутри}q_i}{\mathrm{E}_0}\Rightarrow\oint_{(S)}E_n dS=\frac{1}{\mathrm{E}_0}\sum_{i:\,внутри\,S}q_i$$

$$\oint_S\text{— }замкнутая\,S$$

$$\mathrm{E}_0=8{,}885\cdot 10^{-12}\Phi/м\quad\left(k=\frac{1}{4\pi\mathrm{E}_0}\right)$$

$$[\Phi]=[E\cdot S]=\frac{H}{Кл}\cdot M^2=\frac{B}{M}M^2=B\cdot M$$

Теорема Гаусса используется для расчёта напряженности поля (E) создаваемого телами. Особенно удобно её использовать если распределение зарядов имеет симметрию. При расчёте напряженности дважды является наиболее удобный выбор поверхности S.

Применение теоремы Гаусса

1. Напряженность поля, равномерно заряженного по поверхности сферы

Дано: сфера с радиусом R и с зарядом Q

Определение: Поверхностная плотность заряда: $\sigma=\frac{\lim_{\Delta S\to 0}\Delta Q}{\Delta S}$; ($\sigma=\frac{dQ}{dS}$)

$[\sigma]=Кл/м^2$

Равномерно распределённый заряд $\Rightarrow\sigma=const$ на сфере.

Найти: $E(r)=?$ $\begin{matrix} r\geq R\\ r\leq R\end{matrix}$

1) Точка A вне сферы $r\geq R$

Применим теорему Гаусса. В качестве произвольной замкнутой поверхности, возьмём сферу радиусом OA и к этой сфере применим теорему Гаусса.

$Левая\, часть = \oint\limits_{S_r} E_n dS$

Из симметрии можно доказать, что в любой точке сферы $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{E}$ на сфере S_r

$\Rightarrow E_n = E$, $E = const\, S_r$

$Правая\, часть = \frac{1}{\text{E}_0} \sum\limits_{i\, внутри\, S_r} q_i = \frac{1}{\text{E}_0} Q$

Теорема Гаусса

$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\text{E}_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \text{E}_0 r}$ $r \geq R$ Вне сферы, напряженность поля, совпадает с напряженностью поля в точечном заряде, находящемуся в центре сферы

2. Точка А внутри сферы

$(.) A$ внутри сферы $r < R$

$Левая\, часть = \oint\limits_{(S_r)} E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$ (как в 1)

$Правая\, часть = 0$ (внутри S_r нет заряда)

$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$ $r < R$

Внутри, равномерно заряженных сфер, напряженность поля равна нулю

Следствие:

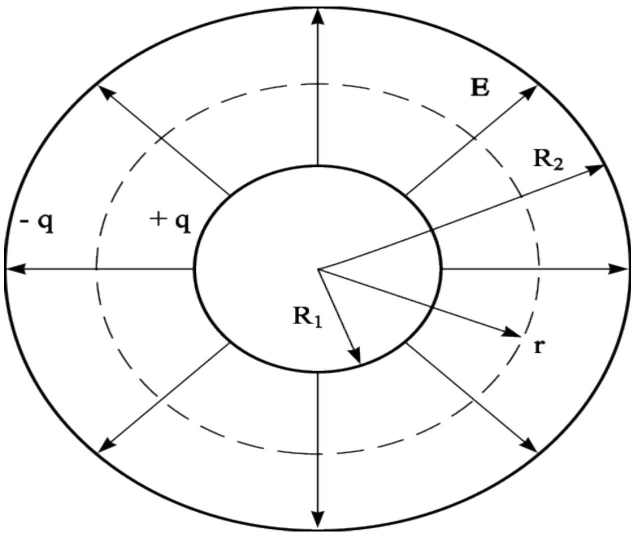
Поле сферического конденсатора

1. $r < R_1 \Rightarrow E_1 = E_2 = 0$ $E = 0$
2. $R_1 \leq r \leq R_2 \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{4\pi \text{E}_0 r^2}$

   $E_r = 0$

   $E(r) = \frac{Q}{4\pi \text{E}_0 r^2}$
3. $E_1 = E_2 = k \frac{Q}{\%ESILON_0 4\pi r^2}$

   $\vec{E}_1 \uparrow\downarrow \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E} = 0$



Напряженность поля, создаваемого плоскостью

σ — поверхностная плотность заряда. $\sigma = const$

$E = ?$

Ответ: $E = \frac{\sigma}{2\text{E}_0}$ E не зависит от r .