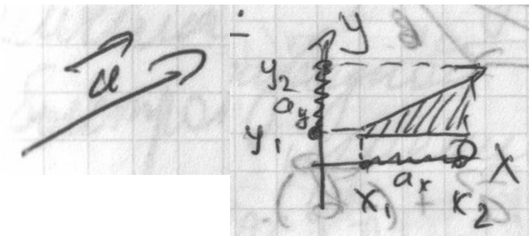
I. О векторах

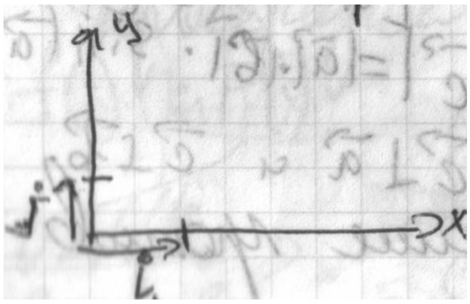


$a_x = x_2 - x_1$

$a_y = y_2 - y_1$
$|\vec{a}|$ - длина
$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

Единичный вектор

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$
$\vec{j} = |\vec{i}|$ — единичный вектор
$|k|$ — для трёх измерений



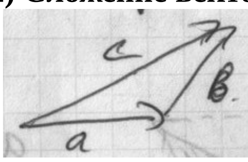
Для трёхмерного:
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_x \vec{k}$

$$\vec{a} = (a_x ; a_y ; a_z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Действия с векторами

1) $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, $k > 0 \Rightarrow \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$
$k < 0 \Rightarrow \vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}$
$|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$

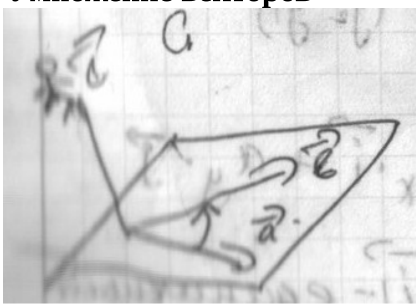
2) Сложение векторов



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

3) Вычитание векторов
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

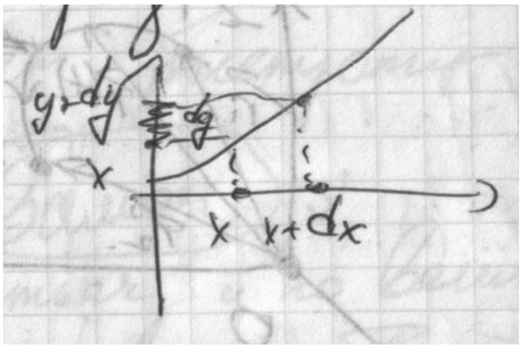
4) Умножение векторов



Скалярное: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ или $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x \cdot b$
Векторное: $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c}$
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
От $\vec{a}$ до $\vec{b}$ вращение против часовой стрелки.
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка.

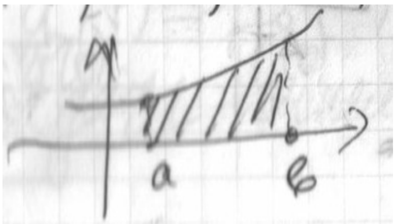
Производная, первообразная

$y=f(x)$ - функция
dx - приращение
$dx \rightarrow dy$
$y'(x)=f'(x)=\frac{dy}{dx}$
$dy=f'(x)dx$



Производная $f(x)=tg\,\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\alpha$ - угол.
Величина производной несёт информацию о быстроте изменения функции.
$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f(x)\uparrow$
$f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f(x)\downarrow$

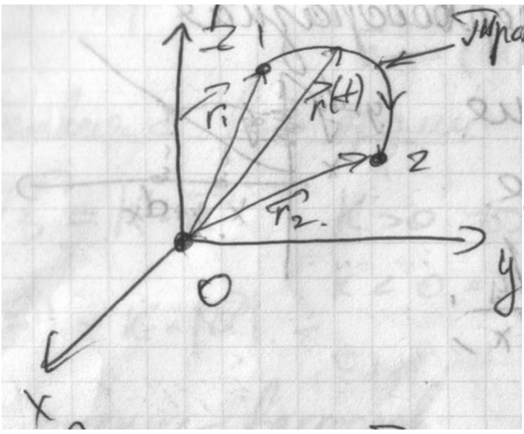
Первообразная



$F(x)=f(x)$
$\int_a^b f(x)dx=F(b)—F(a)=S''$

Кинематика материальной точки.
Прямая и обратная задача кинематики.

1. Векторный способ



$\vec{n}(f)$ — радиус вектор

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

За $\Delta t \Rightarrow \Delta\vec{r}$

Определение: $\vec{V}(t)=\dfrac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{r}\,(t)=\dfrac{d\vec{r}}{d\vec{t}}$

$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

$\vec{V}=\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=V_x\,\vec{i}+V_y\,\vec{j}+V_z\,\vec{k}$

Ускорение — $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{V}(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\vec{V}\,'(t)=\dfrac{d\,\vec{V}}{d\,t}$

$\boxed{\vec{V}=r\,'(t)}$ $\boxed{\vec{a}=\vec{V}\,'(f)}$

Ускорение характеризует быстроту изменения $\vec{V}$.

Замечание: $\vec{V}$ может меняться и по величине и по направлению, в любом из этих случаев будет возникать ускорение.

$\vec{a}=V\,'_x\,\vec{i}+\vec{V}\,'_y\,\vec{j}+V\,'_z\,\vec{k}$

$\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$

$\vec{r}\,(t)\overset{(1)}{\Rightarrow}\vec{V}(t)\overset{(2)}{\Rightarrow}\vec{a}(t)$ — прямая задача кинематики

$\underset{V(0)}{\vec{a}(t)\overset{(3)}{\Rightarrow}}\quad \underset{\vec{r}(0)}{\vec{V}(t)\overset{(4)}{\Rightarrow}\vec{r}\,(t)}$ — обратная задача кинематики

$\dfrac{dr}{dt}=\vec{V}(t)\Rightarrow d\,\vec{r}=\vec{V}(t)dt$

$\int\limits_{r(0)}^{r(t)} dr=\int\limits_0^t \vec{V}(t)dt$

$\vec{r}\,(t)-r\,(0)=\int\limits_0^t \vec{V}(t)dt$

$\vec{r}\,(t)=\vec{r}\,(0)+\int\limits_0^t \vec{V}\,dt$ **(3)**

$\vec{r}=x\,\vec{i}$ (по оси Ox)

$$x(t)=x(0)+\int_0^t V_x(t)\,dt \quad \textbf{(3a)}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{a} \Rightarrow d\vec{V}=\vec{a}(t)\,dt$$

$$\int_{V(0)}^{\vec{V}(t)} dV=\int_0^t a(t)\,dt$$

$$\vec{V}(t)-V(0)=\int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{V}(t)=V(0)+\int_0^t \vec{a}(t)\,dt \quad \textbf{(4)}$$

Пример:

$x(0)=40$

$V_x(0)=5\,м/с$

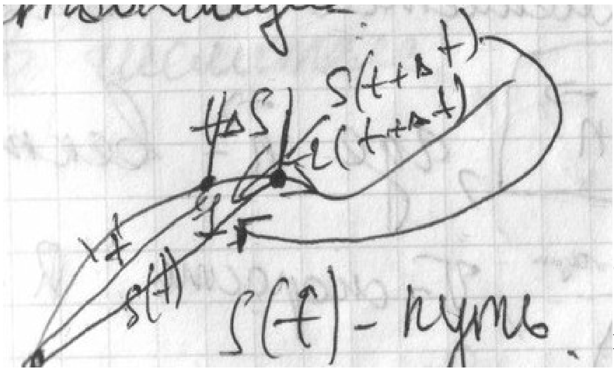
$a_x(t)=-10\,м/с^2$

Найти: $V_x(t)$; $x(t)$

1) $V_x(t)=5+\int_0^t(-10)\,dt=5+(-10)t\,|_0^t=5-10\mathrm{t}$, ($V_x(t)=V_0+a_x$)

2) $x(t)=40+\int_0^t(5-10\mathrm{t})\,dt=40+5\mathrm{t}-\frac{10\mathrm{t}^2}{2}$

Кинематика материальной точки.
Естественный способ описания движения.
Разложение вектора ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие.



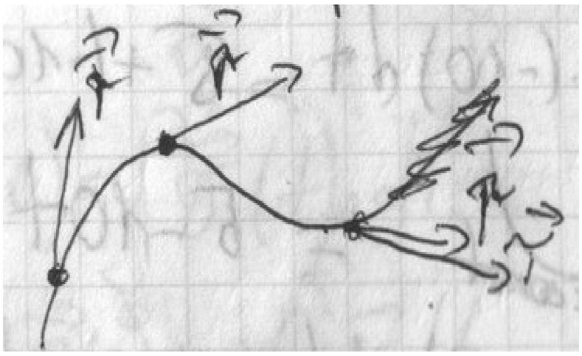
$$V_{cp}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=S'(t)=\frac{dS}{dt}$$

$\vec{V}=S'(t)\cdot\tau$ - определение скорости при естественном описании.

τ — единичный вектор, направлен по касательной к траектории

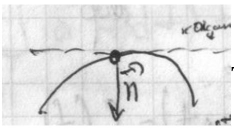
$\vec{a}=\vec{V}'(t)\Rightarrow\vec{a}=(S'(t)\cdot\tau)'=S''(t)+\tau+S'(t)\cdot\vec{\tau}$



Определение:

$S''(t)=\vec{V}'(t)=a_\tau$ - тангенциальное ускорение

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости. Возникает когда скорость меняется по величине. УТВ: $\vec{\tau}'=\frac{V}{R}\cdot\vec{n}$, где $\vec{n}$ — вектор нормали($|\vec{n}|=1$), V — скорость, R — радиус кривизны траектории.



R - радиус окружности такой, то частью его является участок траектории.

$\tau'\neq 0$, если траектория искривлется

τ зависит от того, насколько эта траектория искривляется, причем, чем меньше R (то есть траектория «кривее»), тем производная больше, поэтому R должно находиться в знаменателе.

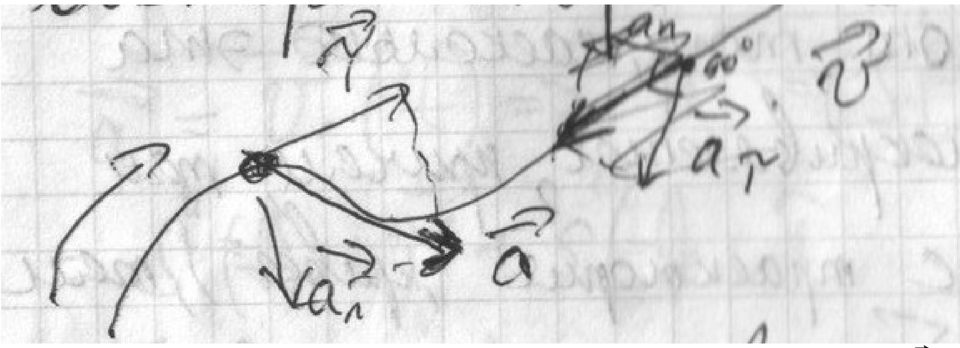
Также τ' зависит от скорости, чем V больше, тем τ' больше, поэтому V в числителе.

$$a=a_\tau\cdot\vec{\tau}+\frac{V\cdot V}{R}\cdot\vec{r}$$

$a_n=\frac{V^2}{R}\Rightarrow\vec{a}=a_\tau\cdot\vec{\tau}+a_n\cdot\vec{\tau}$, a_n - нормальное, центростремительное ускорение.

Разложение вектора на нормальное и тангенциальное

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости.
Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.

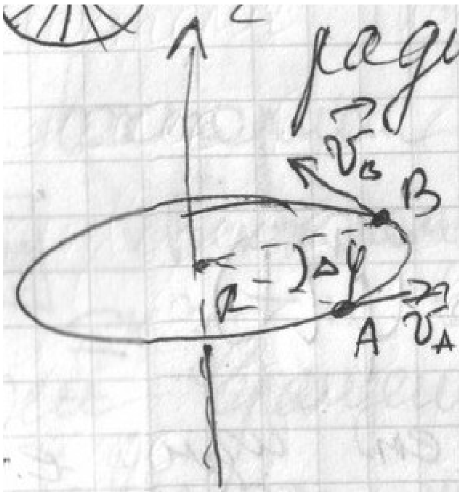


1) Частный случай: движение по прямой $\Rightarrow$ $a_n=0$; $n\rightarrow\infty$, $\vec{a}=a_\tau\cdot\vec{\tau}=\vec{V}\cdot\vec{\tau}$

2) Окружность: $R\rightarrow const$ $\Rightarrow$ $V'=0$ $\Rightarrow$ $a_\tau=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}=a_n\cdot\vec{n}=\frac{V^2}{R}\cdot\vec{n}$

Кинематика вращения тела, относительно неподвижной оси.

Твёрдое тело — система материальных точек, в котором расстояние между любой парой неизменно.
Рассмотрим систему, вращающейся относительно неподвижной оси z .



Каждая точка тела движется по окружности своего радиуса.

$\tau\rightarrow A$
$t+\Delta t\rightarrow B$
$UAB=\Delta l$ — длина дуги.

За $\Delta t\rightarrow$ на $\Delta\varphi$ или на Δl (длина)

Определение:

$$\omega=\frac{\lim\limits_{\Delta t\rightarrow 0}\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\varphi'(t)=\frac{d\varphi}{dt} \quad , \quad [\omega]=\frac{рад}{сек}$$

$$V=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta l}{\Delta t}=l'(t)(S'(t)) \quad , \quad \Delta l=R\cdot\Delta\varphi(геомертия) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{\Delta t}=r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \overset{\Delta\rightarrow 0}{\Rightarrow} \quad \boxed{V=R\cdot\omega}$$ **(1)** — связь линейной скорости и угловой

$V_2 > V_1$

$V(t) = R \cdot \omega'(t)$

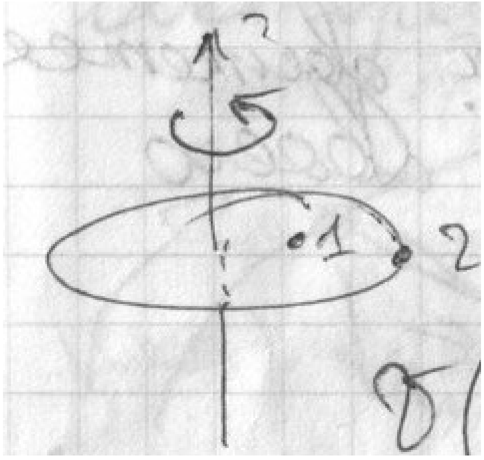
Определение:

$$\text{E} = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t) \Rightarrow \varphi''(t)$$

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости.

$\boxed{a_\tau = R \cdot \text{E}}$ **(2)**

$$a_\tau = \frac{R \cdot d\omega}{dt} = R \cdot \omega'(t)$$



Для вращательного движения твёрдого тела, так же как и для поступательного можно ввести прямую и обратную задачу инематики.

$$\varphi(t) \overset{\omega = dt}{\Rightarrow} \omega(t) \overset{(\text{E} = \omega')}{\Rightarrow} \text{E}(t)$$

$$\begin{Bmatrix} \text{E}(t) \\ \omega(0) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega(t) \Rightarrow \varphi(t) \\ \varphi(0) \end{Bmatrix}$$

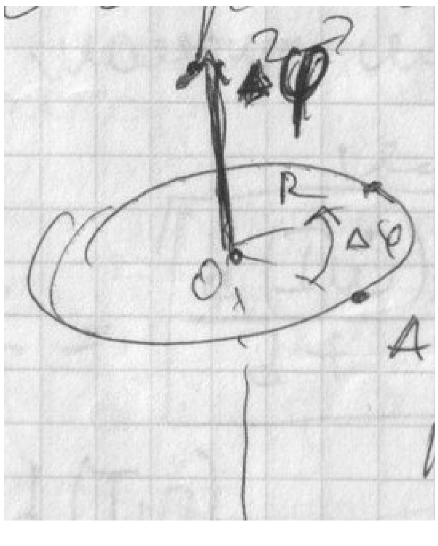
$$(*) \qquad \omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \text{E}(t)\,dt$$

$$(**) \qquad \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(t)\,dt$$

О векторном характере $\vec{\omega}, \vec{\text{E}}, \Delta\vec{\varphi}$

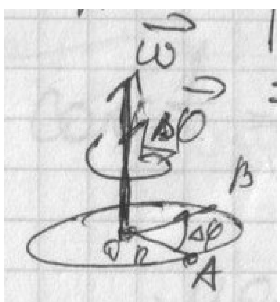
Определение:

Вектором угла поворота($\vec{\varphi}$) называется вектор, направленный вдоль оси вращения, в соответствии с правилом правого винта(буравчика), длина которого равна углу поворота.

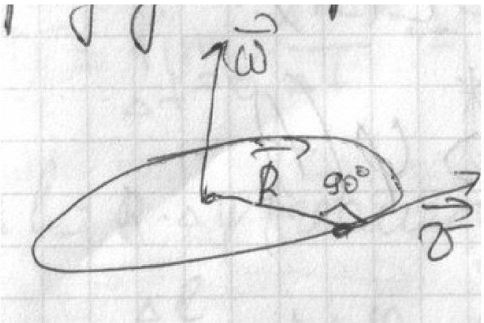


Определение:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow \Delta\vec{\varphi}$$



Предадим формуле **(1)** векторный характер.



$\Rightarrow \quad \vec{V}=[\vec{R}\times\vec{\omega}]$ **(1')**

(проверка:

1) $|\vec{V}|=R\cdot\omega\sin 90^o=R\cdot\omega$ - верно

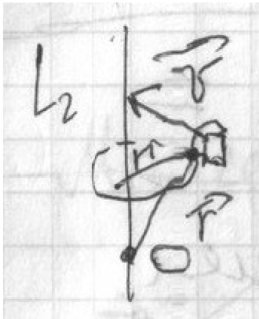
2) Величины $\vec{R};\vec{\omega};\vec{V}$ — образуют правую тройку

)

Предадим векторный характер

$$\vec{E}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\omega}(t+\Delta t)-\vec{\omega}(t)}{\Delta t}$$

Момент p относительно оси



$\Delta\vec{p}=\Delta m\cdot[\vec{V};\vec{r}]$

$\Delta\vec{L}$ (проекция вектора L на ось Z)

Момент F относительно оси

$V=\omega R$

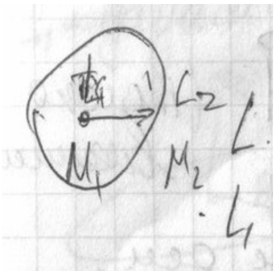
$\Delta m_i-|V_i|\cdot r_i=\Delta m_i\cdot r_i^2\cdot\omega$

$l_z=(\sum m_i\cdot r_i^2)\cdot\omega=I\cdot\omega$

$\vec{M}$ — момент импульса системы материальных точек или для твёрдого тела

$$\boxed{\frac{dl_z}{dt}=\frac{d(I\omega)}{dt}=M_z}$$

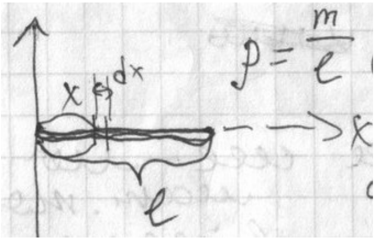
$\frac{d(I\omega)}{dt}=const=0$ — при отсутствии внешних сил момент сокращается



Если момент не меняется

$\frac{dl_z}{dt}=I\frac{d\omega}{dt}=I\,E_z=M_z$ - моменты внешних сил

Момент инерции стержня



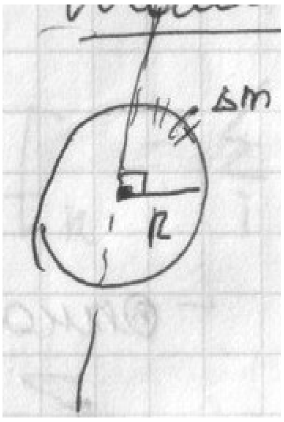
$\rho=\frac{m}{l}$ (для тонкого стержня)

$dm=\rho\cdot dx$ (маленького кусочка)

$dI=pdx\cdot x^2$

$\boxed{I=\rho\int_0^l x^2dx=\rho\frac{l^3}{3}=\frac{m}{e}\cdot\frac{l^3}{3}=\frac{ml^2}{3}=\frac{1}{3}ml^3}$ — момент инерции

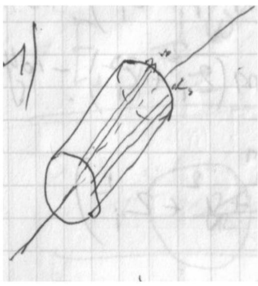
Момент инерции кольца(колеса)



$\boxed{I=\sum\Delta m_i\cdot R^2=R^2\cdot\sum\Delta m_i=mR^2}$

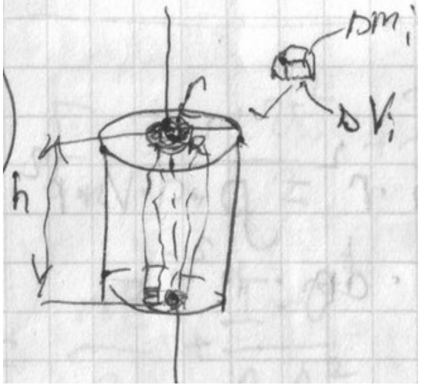
Момент цилиндра

1)



- для тонкого(очень) такая же, как и для кольца

2)



r — радиус малого цилиндра в большом

$\rho=\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ $dm=\rho dV$

$dI=r^2\cdot dm=r^2\cdot\rho dV=r^2 p\cdot 2\pi\cdot r\cdot dr\cdot h$

$I=\rho 2\pi\cdot h\cdot\int_0^R r^3dr=\rho\cdot 2\frac{\pi\cdot h\cdot Ru}{u}=\frac{P\cdot\pi R^2\cdot h}{V}=\frac{\rho\cdot V\cdot R^2}{2}=$

$=\frac{m\cdot R^2}{2}$

$I=\frac{mR^2}{2}$ - момент инерции цилиндра