1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{matrix} \alpha \le 1 \Rightarrow расх \\ \alpha > 1 \Rightarrow сход \end{matrix}\right]$

$a > 0$

2) $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{E \to +0} \int\limits_E^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{E \to +0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_E^a = \lim\limits_{E \to +0} \frac{a^{-\alpha+1} - E^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \left[\begin{matrix} \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, -\alpha+1>0 \\ \infty, -\alpha+1<0 \end{matrix}\right]$

$a > 0, \alpha > 0$

$\alpha = 1 \Rightarrow \int\limits_0^a \frac{dx}{x} = \lim\limits_{E \to +0} \int\limits_E^a \frac{dx}{x} = \lim\limits_{E \to +0} \ln x\Big|_E^a = \lim\limits_{E \to +0} (\ln a - \ln E) = +\infty$

Вывод: $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{matrix} сходится\, при\, \alpha < 1 \\ расходится\, при\, \alpha \ge 1 \end{matrix}\right]$

$a > 0, \alpha > 0$

Признаки сравнения со степенной функцией

Теорема 1

а) Если $0 \le f(x) \le \frac{A}{x^\alpha}, \ \alpha > 1, A > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится

б) Если $\frac{A}{x^\alpha} \le f(x), \ где\ A > 0, \alpha \le 1$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - расходится $(a > 0)$

Теорема 2

а) Если $0 \le f(x) \le \frac{A}{x^\alpha}, \ A > 0, \alpha < 1$, то $\int\limits_0^a f(x)dx$ - сходится $(a > 0)$

б) Если $\frac{A}{x^\alpha} \le f(x), \ A > 0, \alpha \ge 1$, то $\int\limits_0^a f(x)dx$ - расходится $(a > 0)$

Пример:

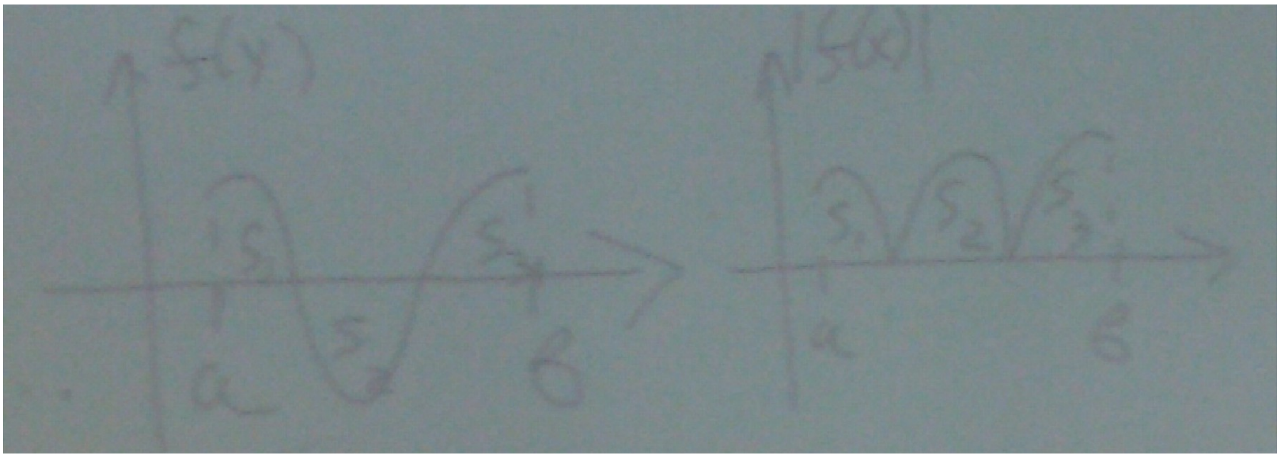
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^3(x^3+1)}$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3(x^3+1)} \le \frac{2x^2}{x^b} = \frac{2}{x^4}$, $\alpha = 4, A = 2$

Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Рассмотрим обычный определённый интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3$$



$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Подобное неравенство можно доказать и для несобственных интегралов.

Другими словами, верна следующая **теорема**:

Если несобственный интеграл от $|f(x)|$ сходится, то сходится и интеграл от самой функции.

Определение:

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$, называется абсолютно сходящимся (a или b может равняться ∞)

Вывод: для проверки абсолютной сходимости можно применять признаки сходимости для положительной функции.

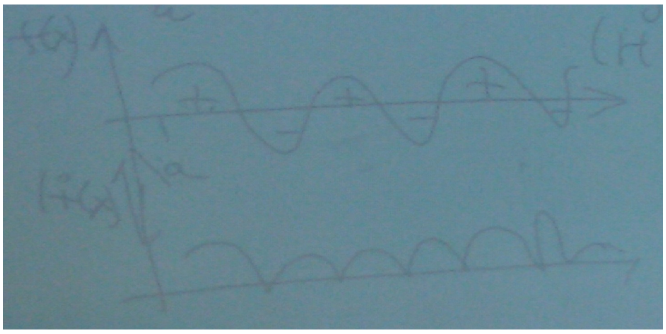
Пример: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

$$|f(x)| = \frac{|sinx|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \Rightarrow \alpha = 2 > 1$$

Для знака переменной функции, возможна ситуация, когда интеграл от модуля расходится, а интеграл от самой функции сходится. Такие интегралы называются условно-сходящимися.

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ - расходится

$\int_a^b f(x)\,dx$ - сходится $\Rightarrow$ называется условно сходящимся (не абсолютно)



Условная сходимость реализуется за счет компенсации, за счет положительной и отрицательной частей интеграла.

Пример(без доказательства)

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ - условно сходится

Дифференциальные уравнения

Уравнение называется дифференциальным, если в него входят производные или дифференциалы от производной функции.

Пример:

$$y' = x^2 \Rightarrow \frac{x^3}{3} + c$$

Пример показывает, что у дифференциального уравнения не единственное решение.

Определение:

Любая конкретная функция, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению называется его частным решением. Частное решение — любая конкретная функция.

Второе определение:

Функция, которая зависит от произвольных постоянных и которая является решением дифференциального уравнения, называется общим решением этого уравнения.
Без общего решения, при конкретных значениях постоянных, получаются частные решения.

Поэтому так важно уметь находить именно общие решения дифференциального уравнения.

Определение порядка уравнения:

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной от неизвестной функции входящей в уравнение.

Пример:

$$y'' = x^2 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow y = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$$

c_1 , c_2 — две произвольные постоянные

Количество произвольных постоянных в общем решении совпадает с порядком уравнения

Вид уравнения

$F(x, y, y') = 0$ — общий вид дифференциального уравнения первого порядка

Пример:

$xy + (y')^2 = 0$

$y' = f(x, y)$ - уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной

Пример:

$y'=xy$

Для уравнения $n-го$ порядка:

$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ — общий вид уравнения $n-го$ порядка

$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ - уравнение разрешённое относительно старшей производной

Примеры:

а) $xy'+yy''=0$

б) $y''=-\frac{xy'}{y}$

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными называются уравнения первого порядка, которые могут быть сведены

Определение:

$y'=\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow$ можно свести к уравнению с разделёнными переменными,

то есть к уравнению: $f(x)dx=g(y)dy$

$\Rightarrow \int_f (x)dx=\int_g (y)dy \Rightarrow F(x)=G(y)+c, где \begin{matrix} F'(x)=f(x) \\ G'(y)=g(y) \end{matrix}$

Примеры:

1) $y'=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy=x\,dx$

$\int y\,dy=\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow y^2=x^2+c_0$, где $c_0=2c$

2) $y'=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

$\ln|y|=\ln|x|+c, c=\ln c_0 \Rightarrow c_0 x$

3) $y'=1+x+y+xy$

$1+x+y(1+x)=(1+x)(1+y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{1+y}=(1+x)dx$

$\ln|1+y|=x+\frac{x^2}{2}+c$, $c=\ln c_0$

$1+y= c_0 e^{x+\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y=c_0 e^{x+\frac{x^2}{2}}-1$