Свойства производных высших порядков

1. $(c f(x))^{(n)}=c f^{(n)}(x)$
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$
3. Производная произведения

а)

$$n=2\Rightarrow(fg)''=((fg)')'=(f'g+g'f)'=(f'g)'+(g'f)'=$$
$$=f''g+f'g'+g''f+g'f'=f''g+2\mathrm{f}'g'+g''f$$

б)

На любое n формула распространяется с помощью биномиальных коэффициентов.

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$$, где $f^{(0)}=f$, $g^{(0)}=g$

Под производной порядка 0 понимается сама функция. Строгое доказательство делается с помощью метода математической индукции.

4. $$\left(\frac{f}{g}\right)''=\left(\left(\frac{f}{g}\right)'\right)'=\left(\left(\frac{f\cdot 1}{g}\right)'\right)'=\left(f'\frac{1}{g}-f\frac{g'}{g''}\right)=f''\frac{\cdot 1}{g}+2f'\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'+f\left(\frac{1}{g}\right)''=$$

$$=f''\frac{1}{g}+2f'\left(-g\frac{'}{g^2}\right)+f\left(-g\frac{'}{g^2}\right)'=$$

$$\left(\frac{-g'}{g''}\right)'=\frac{-g''y^2-g'2\mathrm{y}\mathrm{g}'}{g^4}=\frac{-g''g-2(g')^2}{g^3}$$

$$=\frac{f''}{g}-\frac{2\mathrm{f}'g'}{g^2}+\frac{f(2(g')^2-gg'')}{g^3}$$

Выпуклость, вогнутость и точки перегиба

Определение:

Некоторая кривая называется выпуклой, если любая секущая пересекает её только в двух точках. Для графиков, которые ориентированы относительной системы координат рассматривается график выпуклости вверх, и выпуклости вниз.

Функция выпуклая вверх, если все касательные к этому графику расположены выше, чем сама кривая. График или функция называется выпуклой вниз, или вогнутой, если все касательные к графику расположены ниже, чем сама кривая. Понятие выпуклости или вогнутости относится к некоторому промежутку. На промежутке кривая может быть выпуклой или вогнутой.

Точки, разделяющие участки выпуклости и вогнутости называются точками перегиба. В точках перегиба касательная превращается в секущую.

Примеры:

1. $y=x^2$
2. $y=x^3$

Определение участка выпуклости и вогнутости делается с помощью второй производной.

Теоремы:

1. Если на $(a,b)f''(x)>0$, то на (a,b) $f(x)$ — вогнута

2. Если на $(a,b) f''(x)<0$, то на (a,b) $f(x)$ — выпукла
3. Если в $(.) x_0 f''(x_0)=0$, а при переходе через $(.) x_0 f''(x)$ меняет знак, то в $(.) x_0$ - перегиб

Примеры:

1. $y=x^2 \Rightarrow y'=2x, y''=2>0 \, \textit{при} \, \forall x, \Rightarrow \textit{вогнутость везде}$
2. $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^{2,} y''=6x$
3. $y''=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$

X	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
Y''	-	0	+
Y	выпуклость	точка перегиба	вогнутость

$$y=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow y'=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, 1-x^2>0 \\ \dfrac{-2}{1+x^2}, 1-x^2<0 \end{cases} \qquad Y''=\frac{-2\cdot 2x}{(1+x^2)^{2,}} 1-x^2>0 \quad \frac{4x}{(1+x^2)^2}, 1-x^2<0$$

y'' — не существует, $y''=0$ при $x>0$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$-$	Не существует	$+$	0	$-$	Не существует	$+$
y	Выпуклая		Вогнутая	перегиб	Выпуклая		Вогнутая

Точки пересечения с осями и другие полезные точки.

Простой пример

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

Дифференциал функции

Рассмотрим $y=f(x)$ — непрерывная и дифференцируема в $(.) x_0$ и её определители зададим Δx , тогда по определению $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.
Приращение функции в точке x_0 это разность значений сдвинутой точки в исходную.
$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

Теорема:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\mathrm{E}(\Delta x)\cdot\Delta x \text{ , где } \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{E}(\Delta x)>0$$

то есть $\mathrm{E}(\Delta x)\cdot\Delta x$ — бесконечно малая более высокого порядка

В приближенных вычислениях часто удобно использовать дифференциал вместо приращения, находить его легче(с помощью производной). Свойства дифференциала первого порядка легко получаются из свойств производной.

Свойства

1. $AC=0$, $C — const$
2. $d(f(x)+g(x))=df(x)+dg(x)$
3. $d(f(x)g(x))=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$
4. $d(cf(x))=cdf(x)$, $c-const$
5. Свойства инвариантности(с лат. Неизменность). Не меняется форма первого дифференциала.
6. $y=f(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$
7. $y=f(x), x=x(t) drrarrow\, dy=f'(x)\underbrace{x'(t)dt}_{dx}=f'(x)dx$

Дифференциалы высших порядков

Определение:

$$d^2 f(x_0)=d(df(x))$$

Теорема:

$$d^2 f(x_0)=f''(x_0)(\Delta x)^2 \quad (\Delta X=bx)$$