

Действия с матрицами

Матрицы называются равными, если они полностью совпадают при наложении.

1. Сравнение

$$A=B \Leftrightarrow a_{ik}=b_{ik}$$

$$A \sim m \times n, B \sim m \times n$$

Верно свойство транзитивности:

$$\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases} \Rightarrow A=C$$

2. Сложение

$$A \sim m \times n, B \sim m \times n$$

$$C=A+B, \text{ если } C_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$$

Свойства

$$1) A+B=B+A$$

$$2) A+0=A$$

$$3) (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$$

3. Вычитание

$$C=A-B, \text{ если } A=B+C, \text{ где } A \sim m \times n, B \sim m \times n \Rightarrow C_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$$

4. Умножение матрицы на число

$$B=\lambda A, \text{ если } b_{ik}=\lambda a_{ik}$$

Свойства:

$$1) \text{ Умножение на единицу не меняет матрицу } A=1 \cdot A$$

$$2) \text{ Умножение на ноль приводит к нулевой матрице } 0=0 \cdot A$$

$$3) \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

$$4) (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

$$5) (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$$

$$6) A-B=A+(-1)B$$

5. Умножение матриц.

Матрицы можно перемножать, только если согласованы их размеры.

Пусть $A \sim m \times n, B \sim n \times l$

$$C=AB, \text{ если } C_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sim 3 \times 1$$

$$B=-256 \sim 1 \times 1$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} -6 & 15 & 18 \\ -4 & 10 & 12 \\ 2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim 3 \times 3$$

$$D=BA=(-2)$$

Данный пример показывает, что при перестановке сомножителей не получается одно и тоже.

Свойства

- 1) $AB \neq BA$ (Для некоторых квадратных матриц возможно, что $AB = BA$)
- 2) $AE = A$, $EQ = A$
- 3) $0A = 0$, $A0 = 0$
- 4) $(AB)C = A(BC) = ABC$
- 5) $(A+B)C = AC + BC$

6. Возведение в степень

Пусть $A \approx n \times n$ — квадратная матрица

Тогда,

$$A^2 = A A$$

$$A^3 = A A A = A^2 A = A A^2$$

$$A^n = A A \dots A = A^{n-1} A = A A^{n-1}$$

Вводят матрицу единичного размера

$$A^1 = A$$

$$A^0 = E$$

Многочлен от матрицы

Если $P_n(x) = a_n x^4 + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, A_n \neq 0$,

то $P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$

Вместо деления, используется обратная матрица.

7. Транспонирование

Это преобразование матрицы таким образом, что строки и столбцы меняются местами.

$$B = A^T, \text{ если } b_{ik} = a_{ki}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Если матрица не меняется при транспонировании, то такая матрица называется симметричной.

При транспонировании не меняются местами элементы с одинаковыми индексами,

$$a_{ii} \Rightarrow A \text{ — симметрична, если } a_{ik} = a_{ki}$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ — диагональная матрица симметрична.}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{по диагонали } 2, 3, 4)$$

Свойства

- 1) Двойное транспонирование возвращает к исходной матрице $A = (A^T)^T$
- 2) Транспонирование к сумме, приводит к сумме транспонирования $(A+B)^T = A^T + B^T$
- 3) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Определитель (детерминант) матрицы

Пусть $A \sim n \times n$, тогда определителем матрицы A ($\det A$) называется число, которое вычисляется для матрицы A по определённому правилу

$$1) \quad n=1 \Rightarrow A = (a) \sim 1 \times 1 \Rightarrow \det A = a$$

$$2) \quad n=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim 2 \times 2 \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$3) \quad n=3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}a_{11})$$

Правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Способы приписывания:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей любых порядков

- 1) $\det A = \det(A^T)$, определитель матрицы не меняется при её транспонировании (проверить самостоятельно для определителей третьего порядка). Если доказано какое-то свойство для определителей строк, то такое-же свойство верно для столбцов.

- 2) Если в определителе нулевая строка, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

3) Если в определителе поменять местами две строки, то изменится знак определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

4) Если в определителе две одинаковые строки, то определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство: $\Delta = -\Delta$

5) Если в какой-нибудь строке есть общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(8+5-2-(-2+10+4)) = 4(11-12) = -4$$

6) Если в определителе две строки пропорциональны, то определитель равен нулю

7)

$$\det(A B) = \det A \cdot \det B$$

$$A \sim n \times n, \quad B \sim n \times n$$

Следствие, что даже если $A B \neq B A$, то $\det(A B) = \det(B A)$

8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2' + a_{21}'' & a_{22}' + a_{22}'' & a_{23}' + a_{23}'' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}'' & a_{22}'' & a_{23}'' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 202 & 198 & 314 \\ 102 & 98 & 214 \\ -12 & 16 & 78 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100+102 & 100+98 & 100+214 \\ 102 & 98 & 214 \\ -12 & 16 & 78 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 102 & 98 & 214 \\ -12 & 16 & 78 \end{vmatrix} = 100 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 51 & 49 & 107 \\ -6 & 8 & 39 \end{vmatrix} = \\ = 400 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50+1 & 48+1 & 106+1 \\ -6 & 8 & 39 \end{vmatrix} = 400 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 50 & 48 & 106 \\ -6 & 8 & 39 \end{vmatrix} = 800 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & 24 & 53 \\ -6 & 8 & 39 \end{vmatrix} = 800 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 28 \\ 0 & 14 & 45 \end{vmatrix} = \\ = 800(-45-14 \cdot 28) = 800 \cdot (-437) = -349600$$

9) Определитель не изменится, если к элементам какой-то строки, прибавить элементы другой строки, умноженное на одно и тоже число (эта операция позволяет накапливать нули).

10) Определитель треугольной матрицы, равняется произведению чисел, стоящих на главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определённая симметрична матрица = 1

Следствие: $\det E = 1$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 29 \\ 0 & 0 & -13 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -21 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-20}{21} \right) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{(-21) - 13 \cdot 29 + |72|}{21} = 13 \cdot 29 - |17 \cdot 21| = 20$$