Таблица производных

1) $(c)'=0$
2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$
3) $(e^x)'=e^x$
4) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
5) $(\sin x)'=\cos x$
6) $(\cos x)'=-\sin x$
7) $(tg\,x)'=\frac{1}{\cos^2}x$
8) $(ctg\,x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$
9) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
10) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
11) $(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$
12) $arcctg\,x=\frac{-1}{1+x^2}$

Доказательство:

$$(tg\,x)' = (\sin\frac{x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x — (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

13) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
$a>0, a\neq 1$

Доказательство:

$a^x=e^{x\ln a}=e^t, t=x\ln a$

$(a^x)' = (e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=a^x\cdot\ln a$

14) $(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}$
$a>0, a\neq 1$

15) $(f(kx+b))' = kf'(t), t = kx+b$
$k\neq 0$

Пример:

1) $f(x) = (2x+5)^{100} \Rightarrow f'(x) = 100\cdot(2x+5)^{99}\cdot 2 = 200\cdot(2x+5)^{98}$
2) $f(x) = 2^{(3^x)} = 2^t,\ t=3$,
$f'(x) = 2^t\cdot\ln 2\cdot t' = 2^{(3^x)}\cdot\ln 2\cdot 3^x\cdot\ln 3$

Производная показательно-степенной функции

$$g(x) = \ln f(x) = V(x)\ln u(x) \Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)=V'(x)\ln u(x)}=\frac{V(x)n'(x)}{u}(x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$= \ (V'(x)\ln u(x)) + \frac{u'(x)V(x)}{u}(x)¿u(x)$$

Пример:

$$f(x)=x^x \ \Rightarrow \ g(x) \ = \ \ln f(x) = x\ln x$$

$$g'(x) \ = \ \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + \frac{x}{x} \ = \ \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) \ = \ (\ln x+1)x^x$$

Исследование функций с помощью производных. Различные теоремы.

Возрастание и убывание функций

Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей(убывающей) на промежутке (a,b), если для любых двух точек $\forall x_{1,} x_2 \in (a,b)$, таких что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$
($f(x_1) > f(x_2)$) - монотонно-убывающая функция
Большему значению аргумента соответствует большее значение функции

Определение: $f(x)$ называется невозрастающей(неубывающей) на (a,b), если для $\forall x_{1,} x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, ($f(x_1) \leq f(x_2)$)

Теорема: если на промежутке (a,b) дифференцируемая функция $f(x)$ - неубывающая(невозрастающая), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a,b)

Доказательство(неубыв.): пусть $\Delta x > 0$, тогда

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0 \ \Rightarrow \ f'(x) \ = \ \lim_{\Delta \to +0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right) \geq 0$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$\Delta f(x) \ = \ f(x+\Delta x) - f(x) \ \leq \ 0 \ \Rightarrow \ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ \geq \ 0 \Rightarrow f'(x) \ = \ \lim_{\Delta \to -0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right)$$

Экстремумы функций
(максимумы и минимумы)

Определение:

У $f(x)$ в (.) x_0 (x_1) локальный максимум, если для $\forall x$, достаточно близких к точке x_0 выполняется неравенство: $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_1)$)

Теорема Ферма:

Если у дифференцируемой функции $f(x)$ в (.) x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$

Геометрически это очевидно. В точке локального экстремума, в точке максимума и минимума, касательная становится параллельна оси x и, следовательно, тангенс угла наклона равен нулю.

Доказательство:

а) $\Delta x > 0 \;\Rightarrow\; \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \le 0$

б) $\Delta x < 0 \;\Rightarrow\; \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$