Операционные счисления.
Оригиналы и их свойства

Определение:

Оригиналом называется комплексно-значимая функция вещественного аргумента $f(t)$, которая удовлетворяет трём условиям:

1. $f(t)=0$, при $t<0$
2. Нарост функции: $|f(t)|\le Ce^{\alpha t}$, где $C>0$
   $\alpha_0=min\{\alpha\}$ - показатель роста $f(t)$
3. (условие Дирихле) f(t) либо непрерывна, либо имеет конечное число разрывов $[0;l]\forall e$

Комплексно значимая функция

$f(t)=u(t)+iv(t)$,

где $u(t)=Re\,f(t)$,

$v(t)=Im\,f(t)$

Примеры

1. Функция Хевисайда
   $f(t)=\begin{Bmatrix}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{Bmatrix}=\eta(t)$
   $\alpha_0=0$
2. $f(t)=\eta(t)e^{\lambda t}$, λ — *вещественная* (>0)
   $\alpha_0=\lambda$
   В дальнейшем пишем f(t) = e^{%lambda t}, подразумеваем, что функция Хевисайда есть в каждом множителе.
3. $f(t)=\sin\omega t$
   $\Rightarrow\alpha_0=0$
4. $f(t)=\cos\omega t$
   $\Rightarrow\alpha_0=0$
5. $f(t)=e^{\lambda t}$, $\lambda=\sigma+i\tau$ — комплексное число
   $=e^{\sigma t}c^{it\tau}=e^{\sigma t}(\cos t\tau+i\sin t\tau)$ $\Rightarrow$ $\alpha_0=\sigma=\Re\lambda$
   $|e^{\lambda t}|=e^{\sigma t}\sqrt{\cos^2 t\tau+\sin^2 t\tau}$

Преобразование Лапласа для оригинала

Определение:

Пусть $p=x+iy$. Пусть $f(t)$ — оригинал

тогда $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

В технике преобразование Лапласа называется «изображение».

$F(p)=L[f(t)]$ — оператор Лапласа

Теорема:

Интеграл сходится при $\mathrm{Re}\,p=x>\alpha_0$, где α_0 — показатель роста $f(t)$

Теорема доказывается с помощью неравенств и получается следующее неравенство:

$|F(p)|\le C\int_0^{+\infty} e^{\alpha_0 t}e^{-xt}dt=x>\alpha_0=\frac{c}{x-\alpha_0}$ $f(t)\leftarrow\rightarrow F(p)$ $(\doteq)$

Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема линейности

Если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, то для любых чисел α и β верно $\alpha f(t) + \beta g(t) dor = \alpha F(p) + \beta G(p)$

2. Теорема подобия

Если $f(t) \doteq F(p)$, $\omega > 0$, то $f(\omega t) \doteq \frac{1}{\omega} F(\frac{p}{\omega})$

Пример

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \frac{1}{(\frac{p}{\omega})^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

3. Теорема смещения

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p-\lambda)$

Доказательство

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p-\lambda)$$

4. Изображение производной

Если $f(t) \doteq F(p)$, то $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$

Доказательство получается из формулы интегрирования по частям.

($L[f'(t)] = pL[f(t)] - f(0)$)

Следствия

a) $f''(t) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$

Доказательство

$$L[f''(t)] = pL[f'(t)] - f'(0) = p(pL[f(t)] - f(0)) = p^2 L[f(t)] - pf(0) - f'(0)$$

b) $f'''(t) = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$ и т. д.

$\Rightarrow \quad f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

Эта теорема позволяет применять преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В преобразованном виде они сводятся к линейным алгебраическим уравнениям.

Решать удобно задачу Коши. Задачей Коши называется дифференциальное уравнение и заданное начальное условие.

$$\left\{ \begin{matrix} y'' + y = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{ Введём } \quad y(t) \doteq Y(p)$$

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{1}{p-2}$$

$$(p^2+1) Y(p) - p = \frac{1}{p-2}$$

$$(p^2+1) Y(p) = \frac{1}{p-2} + p = \frac{1 + p(p-2)}{p-2}$$

$$Y(p) = \frac{1 + p^2 - 2p}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{p^2 - 2p + 1}{(p-2)(p^2)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+c}{p^2+1}$$

Самый простой способ отыскания оригинала состоит в следующем: с помощью алгебраических преобразований привести к сумме табличной.

$$p^2-2p+1=A(p^2+1)+(Bp+c)(p-2)$$

$$p=2 \quad \Rightarrow \quad 1=A\cdot 5 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5}$$

$$p=0 \quad \Rightarrow \quad 1=A-2C \quad \Rightarrow \quad 2C=A-1=-\frac{4}{5}$$

$$p=1 \quad \Rightarrow \quad 0=2A+(B+C)(-1) \quad \Rightarrow \quad B=2A-C=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

$$=\frac{1/5}{p-2}+\frac{4}{5}\frac{p}{p^2+1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteq\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{4}{5}\cos t-\frac{2}{5}\sin t=y(t)$$

Таблица

1. $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$

   Доказательство:

   $\int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{R \to +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^R = \lim_{R \to +\infty} \frac{e^{-pR}-1}{-p}$

   $x>0 \Rightarrow e^{-xR}(\cos yR + i \sin yR) \to 0$

2. $e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p-\lambda}$

   Доказательство:

   $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{R \to +\infty} \frac{e^{-(p-\lambda)}}{-(p-\lambda)}\Big|_0^R = \lim_{R \to +\infty} \frac{e^{-pR}-1}{-(p-\lambda)}$

   $x>0$

3. $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\omega>0$

   Доказательство:

   $e^{i\omega t} = \frac{1}{p-i\omega} \; ie^{-i\omega t} = \frac{1}{p+i\omega} \quad \Rightarrow \quad \sin \omega t = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{2i\omega}{2i(p^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

4. $\cos \omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\omega>0$

5. $sh\,\omega t = \frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+\omega-p+\omega}{p^2-\omega^2} = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

6. $ch\,\omega t = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{t} = \frac{p}{p^2-\omega^2}$

7. $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{p^2+4+p^2}{2p(p^2+4)} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$

8. $e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \omega(p-\lambda^2)+\omega^2$

9. $e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

10. $e^{\lambda t} sh\,\omega t \doteq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$

11. $e^{\lambda t} ch\,\omega t \doteq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$