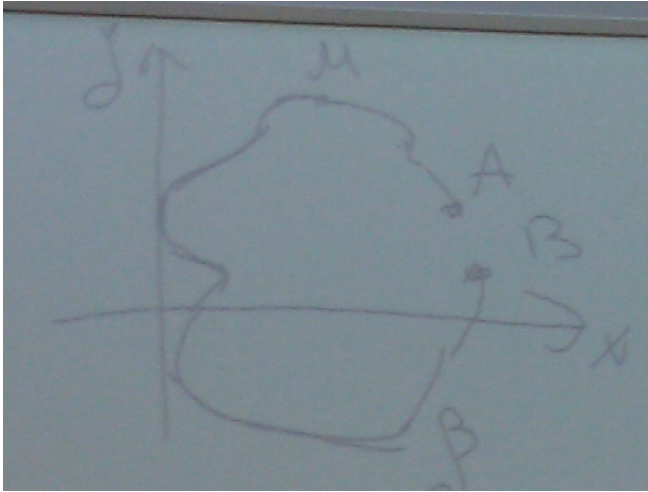




$(.)M(x, y)$
 $x=x(t) \quad , \quad y=y(t) \quad , \quad t \in [\alpha, \beta]$
 $(.)A$
 $(.)B \leftrightarrow t=\beta$

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt = \int_0^2 \pi \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt$$

$$x = R \cos t$$

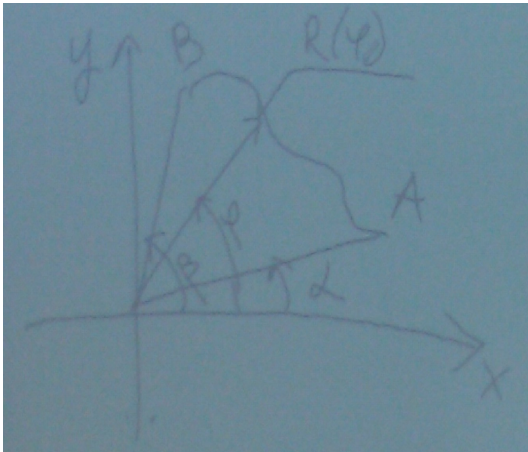
$$y = R \sin t$$

$$x' = -R \sin t, y' = R \cos t$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2} \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$P = 2 \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2 \int_{-R}^R \frac{\sqrt{R^2}}{R^2 - x^2} dx$$

Вычисление длины дуги в поле координат

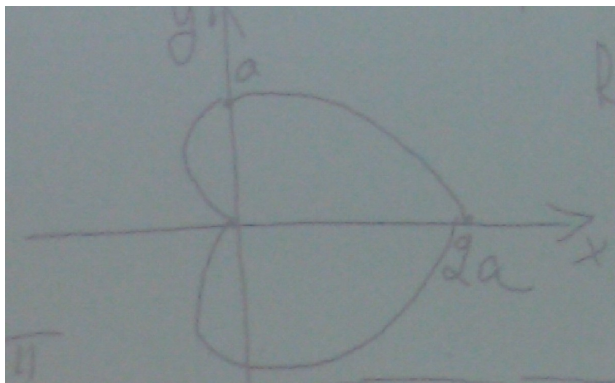


$(.)M(\alpha, R(\varphi))$ - поле координат
 $x = r \cos \varphi = R(\varphi) \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi = R(\varphi) \sin \varphi$
 $\varphi = t \in [\alpha, \beta]$
 $x' = R'(\varphi) \cos \varphi - R(\varphi) \sin \varphi$
 $y' = R'(\varphi) \sin \varphi + R(\varphi) \cos \varphi$

$$(x')^2 + (y')^2 = R'(\varphi)^2 \cos^2 \varphi - 2RR' \sin \varphi \cos \varphi + R^2 \sin^2 \varphi + (R')^2 \sin^2 \varphi + 2RR' \sin \varphi \cos \varphi + R^2 \cos^2 \varphi$$

Пример:

$$P(\varphi) = a(1 + \cos \varphi), a > 0, R' = -a \sin \varphi$$



$$\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi = 2 + 2 \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$P = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi$$

Несобственные интегралы

Интеграл называется несобственным, если что-то обращается в бесконечность.

I рода

промежуток бесконечность, то есть

$$[a, b] \rightarrow \begin{bmatrix} [a; +\infty) \\ (-\infty; b) \\ (-\infty; +\text{intinity}) \end{bmatrix}$$

Несобственные интегралы первого рода

1) Пусть $f(x)$ — непрерывна при $x \geq a$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$$

Если существует конечный предел, то интеграл называется сходящимся и этот предел берётся за значение интеграла.

Если предел бесконечен или не существует, тогда интеграл называется расходящимся.

2) Пусть $f(x)$ — непрерывна при $x \leq b$, тогда

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^b f(x) dx$$

3) Пусть $f(x)$ — непрерывна при $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\text{Тогда } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

Интеграл существует, если независимо друг от друга при любом c существуют два этих предела.

Интегралы II-го рода

- 1) Пусть $f(x)$ — непрерывна при $x \in (a, b]$,
причем $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a+0$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \lim_{E \rightarrow +0} \int_{a+E}^b f(x) dx$$

- 2) Пусть $f(x)$ — непрерывна при $x \in [a, b)$,
причем $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b-0$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \lim_{E \rightarrow +0} \int_a^{b-E} f(x) dx$$

- 3) Пусть $a < c < b$, пусть $f(x)$ — непрерывна, исключается точка c ,
причем $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow c$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{E_1 \rightarrow +0 \\ E_2 \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-E_1} f(x) dx + \int_{c+E_2}^b f(x) dx \right)$$

Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{\substack{E \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_E^R \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Геометрический смысл несобственных интегралов

Геометрический смысл несобственных интегралов - площадь неограниченной фигуры.

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \arctg x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$S = \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{E \rightarrow +0} \int_E^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{E \rightarrow +0} \left. \frac{-1}{x} \right|_E^1 = \lim_{E \rightarrow +0} \left(\frac{1}{E} - 1 \right) = +\infty$$

3) $S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{E \rightarrow +0} \int_E^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{E \rightarrow +0} 2\sqrt{x} \Big|_E^1 = \lim_{E \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{E}) = 2$

Несобственные интегралы от похожих функций

Признаки сходимости

Признаки сравнения

Пусть $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$

Тогда

1) Если сходится $\int_a^b g(x) dx$, то сходится и $\int_a^b f(x) dx$

2) Если расходится $\int_a^f (x) dx$, то расходится и $\int_a^b g(x) dx$

Признаки сравнения со степенной функцией

$$g(x) = \frac{A}{x^\alpha} \quad A > 0, \quad x > 0$$

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{A dx}{x^\alpha} \quad a > 0$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-\alpha+1} = \begin{cases} +\infty, & -\alpha+1 > 0 \\ 0, & -\alpha+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{Aa^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{A dx}{x} = A \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \frac{dx}{x} = A \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^R = A \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \ln R - \ln a \right) = +\infty$$