

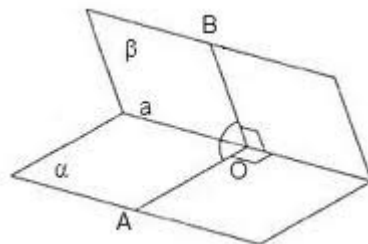
Для самостоятельного изучения:

- Кривые второго порядка — это эллипс, гипербола и парабола.

Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями — это двугранный угол.

Линии пересечения надо провести секущую плоскость и угол, который получится в сечении, будет тот самый угол. Если каждая плоскость задана своим уравнением в общем виде.



Для первой плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

Для второй плоскости: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ — вектор нормали к первой плоскости

$\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — вектор нормали ко второй плоскости

Угол между плоскостями равен углу между нормальными. Угол между векторами (тем самым между плоскостями) находим с помощью скалярного произведения.

Условие перпендикулярности двух плоскостей: Это скалярное произведение для этих векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ равняется 0.

Условие параллельности состоит в том, что два вектора нормали параллельны. А два вектора параллельны тогда, когда их координаты пропорциональны. То есть $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Допустим $A_x + B_y + C_z = 0$ - уравнение плоскости.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}$$

Угол между прямой и плоскостью является дополнительным углом.

$$\varphi + \alpha = 90^\circ$$

φ находим с помощью скалярного произведения $\vec{S}$ и $\vec{N}$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости — это когда прямая направлена по вектору нормали, это значит, что $\vec{S} \parallel \vec{N}$. Условия параллельности $\vec{N}$ и $\vec{S}$ — это условие пропорциональности их координат. Условие параллельности прямой и плоскости состоит в том, что $\vec{N} \perp \vec{S}$, а это значит, что скалярное произведение $\vec{N}$ и $\vec{S}$ равно 0.

$$\vec{N} = (A, B, C)$$

$$\vec{S} = (m, n, l)$$

$$(\vec{N}, \vec{S}) = Am + Bn + Cl$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{N}, \vec{S})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{S}|}$$

1. Прямая перпендикулярна к плоскости тогда, когда $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}$

2. Прямая параллельна к плоскости тогда, когда $Am + Bn + Cl = 0$

Если прямая не параллельна к плоскости, то тогда мы можем найти точку пересечения. Для этого надо использовать параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + lt \end{cases} \quad T = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cl}$$

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + lt) + D = 0$$

$$(\cdot) 0(x, y, z) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{m(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cl} \\ y = y_0 - \frac{n(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cl} \end{cases}$$

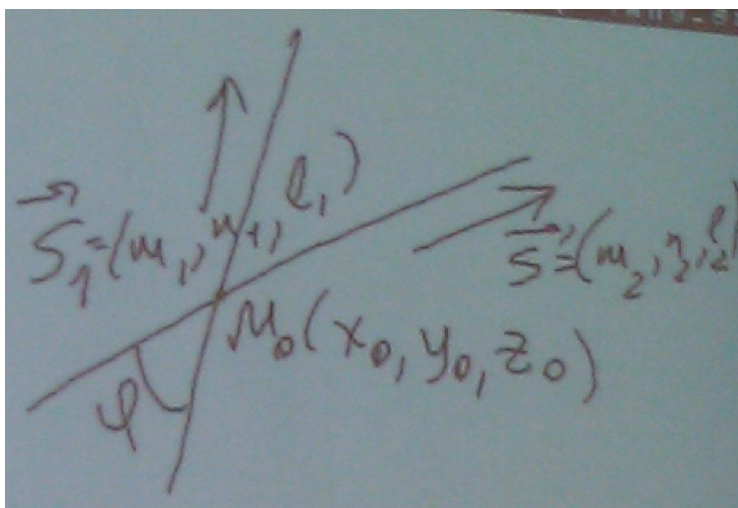
Две пересекающиеся прямые

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{l_1}$$

$$\frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{l_2}$$

Угол между прямыми равен углу между направляющими векторами и угол мы находим с помощью скалярного произведения.

$$\cos \varphi = \frac{|(\vec{S}_1, \vec{S}_2)|}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}$$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\vec{N} = (A, B, C) = [\vec{S}_1, \vec{S}_2]$$

Две прямые в пространстве, которые не параллельны и не пересекающиеся называются скрещенные.

Условие пересечения двух прямых — это условие компланарности двух векторов.

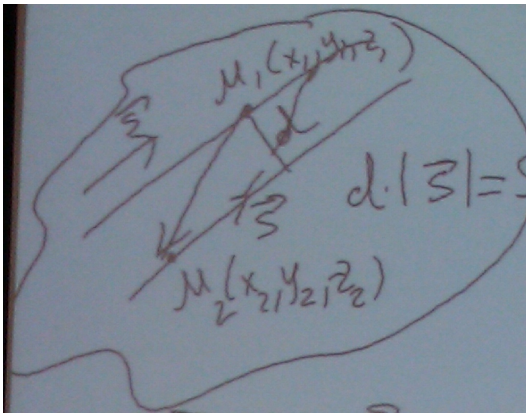
$$(\vec{M}_1 \vec{M}_2 \times \vec{S}_1) \cdot \vec{S}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0$$

Для скрещивающихся прямых можно поставить задачу найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

Если 3 этих вектора не компланарны, тогда d равняется высоте ($h = \frac{V}{S}$) в пирамиде или параллелепипеде.

$$d = \frac{|\vec{M}_1 \vec{M}_2 \times \vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| \times |\vec{S}_2|}$$

Как написать уравнение плоскости, которое проходит через две параллельные прямые.



$$\vec{S} = (m, n, l)$$

$$\frac{x-x_0}{m_1} = \frac{y-y_0}{n_1} = \frac{z-z_0}{l_1}$$

$$\frac{x-x_0}{m_2} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{l_2}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{S} \Rightarrow \text{прямые сливаются}$$

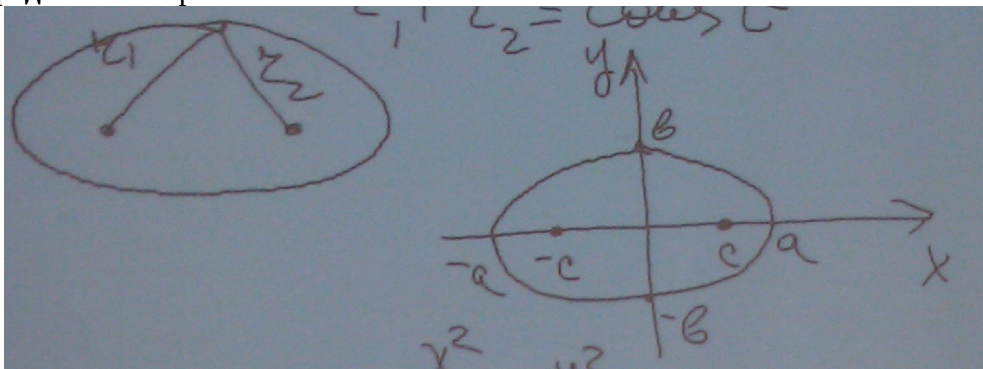
$$\overrightarrow{M_1 M_2} \not\parallel \vec{S} \Rightarrow \text{прямые параллельны и не сливаются}$$

$$\vec{N} = (A, B, C) = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{S}$$

$$M_0 = M_1 \text{ или } M_2 \Rightarrow A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

1. Эллипс

Определение: Кривая



Сумма расстояния, которая от двух выделенных точек является постоянной.

$$r_1 + r_2 = \text{const}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a , b — полуоси эллипса

1) Если $a = b \Rightarrow$ окружность

$$R = a = b$$

2) $E^2 = a^2 - b^2$

2. Гипербола

Определение: $r_1 - r_2 = \text{const}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

У гиперболы всегда есть асимптоты:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

