Неопределённый интеграл
Первообразные и её свойства

Определение: пусть на промежутке (a, b). Задана $f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Примеры:

1. $f(x)=x^2$

   $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2$

2. $f(x)=x^3$

   $F(x)=\frac{x^4}{4}$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{4x^3}{4}=x^3$

3. $f(x)=x^3$

   $F(x)=\frac{x^4}{4}+5$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)'+5'=x^3$

Свойства первообразных

1. Первообразная у заданной функции не единственная
   Если у $f(x)$ первообразная $F(x)$, то F_1(x) = F(x) + c, где c — const — тоже первообразная
   Доказательство: $F_x'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)+c'=F(x)$
2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразная одной $f(x)$, то
   $F_1(x) — F_2(x)=c-const$

Неопределённые интегралы

Определение: неопределённым интегралом от f(x) (символ: $\int f(x)dx$)
Называет все семейство первообразных этой функции.
То есть $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)$ — какая-то конкретная первообразная, а C — произвольная постоянная.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, если $\alpha\neq-1$

   а) $\alpha=0\Rightarrow\int 1dx=x+c$

   б) $\alpha=1\Rightarrow\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

   в) $\alpha=-2\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2}=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

2. $\alpha=1/2\Rightarrow\int\sqrt{(x)}dx=\frac{x^{3/2}}{¿}$

   $\alpha=-1\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

Доказательство: $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, x>0 \\ \ln(-x), x<0 \end{cases}$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x}, x>0 \\ (\ln(-x))' = \frac{1}{t} t' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}, \text{для } x<0 \end{cases}$$

3. $\int e^x\, dx = e^x + C$
4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

Обратные тригонометрические функции

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = \frac{\pi}{2} - \arccos x + C = C_1 - \arccos x$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C = C_1 - arcctg\, x$, (так как $arctg\, x + arcctg\, x = \frac{\pi}{2}$)
10. $\int 0\, dx = C$

Свойства неопределённого интеграла

Эти свойства доказываются с помощью дифференцирования.

1. Постоянный множитель можно выносить из под знака интегралла
   $\int c\, f(x) dx = c \int f(x) dx$, где $c - const$
   Доказательство:
   л.ч. $\Rightarrow (\int c\, f(x) dx)' = cf(x)$
   п.ч. $\Rightarrow (c \int f(x) dx)' = c(\int f(x) dx)' = c\, f(x)$
2. $\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$
3. $(\int f(x) dx)' = f(x)$ — из определения
4. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$
5. $\int d\, F(x) = F(x) + C$

Основные приёмы интегрирования

1. Замена переменной
   Идея: сделать такую замену, под знаком интеграла, чтобы получить простой интеграл.
   $x \leftrightarrow t = \varphi(x) \Leftrightarrow x = g(t)$, $\%apha\, u\, g$ — взаимно обратные
   Теорема: $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$
   Доказательство:
   л.ч. $\Rightarrow (S\ f(x) dx)' = f(x)$
   п.ч. $\Rightarrow (F(\varphi(x)) + C)' = F_t'(t) t_x' = f(g(t)) g'(t) \cdot \left| \begin{matrix} \varphi' x \\ t = \varphi(x) \end{matrix} \right| = f(x)$

Примеры:

1) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int e^t dt = \frac{e^t}{\ln} a + C = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$

$a^x = e^{x\, lna} = e^t \, , t = x\, lna \, , dt = \ln a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\ln a}$

2) $\int \frac{x\, dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{1 + (x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} arctg\, t + C = \frac{1}{2} arctg\,(x^2) + C$

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\, dx$

3) $\int \frac{x\, dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

$t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\, dx$

4) $\int \frac{dx}{2x + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x + 5| + C$

$t = 2x + 5 \Rightarrow dt = 2dx$

5) $\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a}\int t^\alpha dt = \frac{\frac{1}{a}\cdot t^{\alpha+1}}{¿}\alpha + 1 + C = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$

$a\, , b - const\, , \alpha \neq -1$

$t = ax + b \Rightarrow dt\ adx$

6) Линия замена:

Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

7)

$\int \frac{dx}{m^2 + x^2} = \int \frac{mdt}{m^2 + m^2 t^2} = \int \frac{mdt}{m^2(1 + t^2)} = \frac{1}{m}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{m} arctg\, t + C = \frac{1}{m} arctg\, \frac{x}{m} + C$

$x = mt \Rightarrow dx = mdt \quad , \quad m > 0$

8)

$\int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}} = \int \frac{mdt}{\sqrt{m^2 - m^2 t^2}} = \int \frac{mdt}{m\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{m} + C$

$m > 0 \quad , \quad x = mt \Rightarrow dx = mdt \quad \backslash$

9) $\int tg\ x\, dx = \int \frac{sinx\, dx}{cosx} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos|\, x + C$

$t = \cos x \Rightarrow dt = -sinx\, dx$

10) $\int c\, tg\ x\, dx = \ln|\sin x| + C$

2. Интегрирование по частям

$\int u(x) V'(x)\, dx = u(x) V(x) - \int V(x)\, u'(x)\, dx$

Кратко: $\int u\, dV = uV - \int V\, du$