

Однородные уравнения первого порядка

Уравнения называются однородными, потому что в записи уравнения участвует однородная функция двух переменных.

Определение

$f(x, y)$ называется однородной порядка (степени) « k », если для $\forall t \neq 0$ выполнено $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$

Примеры

1. $z = 2x + 3y$
2. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$
3. $z = \frac{x+y}{x-y}$
4. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

Если $k=0$ функцию часто называют просто однородной функцией.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$y' = f(x, y)$, если $f(tx, ty) = f(x, y)$ (если у него в правой части стоит однородная функция)

Метод решения такого уравнения

Вводим $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, тогда

$$y = xu(x) \Rightarrow y' = u(x) + xu'(x) \Rightarrow u(x) + xu'(x) = f(x, xu(x))$$

По свойствам однородности: $f(x, xu(x)) = f(1, u(x)) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u$

Пусть $f(1, u) \neq u$, тогда $\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

Пусть $F(u) : F'(u) = \frac{1}{f(1, u) - u}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(u) &= \ln x + \ln c \\ F(u) &= \ln cx \Rightarrow cx = c \\ cx &= e^{F(\frac{y}{x})} \end{aligned}$$

Разберём случай, когда знаменатель обращается в 0.

Пусть $f(1, u) = u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = c \Rightarrow \frac{y}{x} = c \Rightarrow y = cx$

Пример

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+y}{x-y}, \text{ вводим } u = \frac{y}{x} \Rightarrow u + xu' = \frac{x+xu}{x-xu} \Rightarrow xu' = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow \\ \Rightarrow x \frac{du}{dx} &= \frac{1+u-u+u^2}{1-u} \end{aligned}$$

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{(1-u)du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln cx$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(c^2 x^2 (1 + \frac{y^2}{x^2}))$$

$$2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln(c^2(x^2 + y^2))$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c_0 e, \quad c_0 = \frac{1}{c^2}$$

Линейное уравнение первого порядка

Уравнение называется линейным, если оно линейным образом зависит от y и y' , это значит, что такое уравнение можно записать в следующем виде: $y' + p(x)y = f(x)$, где $f(x)$ и $p(x)$ — непрерывные функции, $p(x)$ — коэффициент, $f(x)$ — свободный член или правая часть.

$$1) \quad f(x) = 0 \Rightarrow y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x)dx \Rightarrow \ln cy = -P(x), \text{ где } P(x) = \int p(x)dx$$

$$\Rightarrow y = c_0 e^{-P(x)}, \quad c_0 = \frac{1}{c}$$

2) Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — не нулевая функция

$f(x)$ — не нулевая функция

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Метод Эйлера: ищем $y(x) = u(x)v(x)$ (легче будет решать потому что мы сами наложим дополнительные условия)

$$y' = u'v + v'u$$

$$u'v + \underbrace{v'u + p(x)uv}_{=0} = f(x)$$

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ y'v = f(x) \end{cases} \Rightarrow v = e^{-P(x)} - \text{частное решение}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx = F(x) + c, \text{ где } (-\text{производной}, \quad F(x): F'(x) = f(x)e^{P(x)})$$

$$\Rightarrow y(x) = uv = (F(x) + c)e^{-P(x)} = F(x)e^{-P(x)} + ce^{-P(x)}$$

Получилось, что общее решение неоднородного уравнения представлено в виде суммы, где одно слагаемое — общее решение однородного (о.о.), а второе слагаемое — частное решение (ч.н.) неоднородного.

Уравнение Бернулли

Уравнение, которое решается с помощью сведения к линейному, хотя оно не является линейным.

Выглядит следующим образом: $y' + p(x)y = f(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$

Эти два случая $n \neq 0, n \neq 1$ дают линейные уравнения (n может быть и дробным и отрицательным).

Решение:

1. Делим уравнение на y^n : $\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = f(x)$, вводим новую неизвестную

функцию $t(x) = y^{1-n} \Rightarrow t'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$

$$\left[\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = f(x) \right] \cdot (1-n) \Rightarrow t' + \tilde{p}(x)t = \tilde{f}(x), \text{ где } \tilde{p} = (1-n)p, \tilde{f} = (1-n)f$$

Пример(4045):

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$$

$$\left[y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y} \right] : \sqrt{y}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad p(x) = -\frac{4}{x}, \quad f(x) = x$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

$$t = \sqrt{y} \Rightarrow t' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$2t' - \frac{4}{x}t = x \Rightarrow t' - \frac{2}{x}t = \frac{x}{2}$$

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} v' - \frac{2}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x} \\ u'v = \frac{x}{2} \end{array} \right\}, \quad \ln v = 2 \ln x, \quad v = x^2$$

$$u'x^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow u' = \frac{1}{2x} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \ln x + c \Rightarrow t = \left(\frac{1}{2} \ln x + c \right) x^2$$

$$t = \sqrt{y} \Rightarrow y = t^2 = \left(\frac{1}{2} \ln x + c \right)^2 x^4$$

Уравнение в полных дифференциалах

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow P(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0, \text{ где } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Тогда существует функция $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y)$$

$$\Rightarrow du(x, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = c$$

Пример(4052):

$$e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$$

$$p = e^y \quad ; \quad \varphi = xe^y - 2y$$

$$; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y - 0 = e^y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = e^y \Rightarrow u(x, y) = xe^y + c(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y - 2y \Leftrightarrow xe^y + c'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow c'(y) - 2y \Rightarrow c(y) = -y^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = xe^y - y^2 \Rightarrow xe^y - y^2 = c$$