Линейные дифференциальные неоднородные уравнения второго порядка

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

Теорема об общем решении

$y_{о.н.}=y_{о.о.}+\bar{y}$, где $\bar{y}$ — частное решение неоднородного уравнения
$\Leftrightarrow$ $y_{о.н.}=c_1 y_1(x_1'+c_2 y_2(x))+\bar{y}$, где c_1 и c_2 — производная пост. y_1 и y_2 — линейно независимые решения уравнения $L(y)=0$
$\bar{y}$ — частное решение уравнения $L(y)=f(x)$ (неоднородные уравнения)

Постоянные коэффициенты

$y''+py'+qy=f(x)$, $p,q-const$

1) $y''+py'+qy=0$ - умеем
   y_1 и y_2 — линейно независимые
2) Ищем $\bar{y}$: $L(\bar{y})=f(x)$
   В случае постоянных коэффициентов и правой части специального вида существует метод подбора для поиска частного решения $\bar{y}$
   Для $f(x)$ — специального вида существует метод подбора для поиска $\bar{y}$

   Допускаются $f(x)$ вида
   1) $e^{\alpha_0 x}\cdot P_n(x)$
   2) $P_n(x)\sin\beta x+Q_m(x)\cos\beta x$
   3) $e^{\alpha_0 x}\sin\beta x P_n(x)+e^{\alpha_0 x}Q_m(x)\cos\beta x$

   1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ $\Rightarrow$ $\alpha_*=\alpha_0$
   2) $f(x)=\sin\beta x\cdot P_n(x)+\cos\beta x\cdot Q_n(x)$ $\Rightarrow$ $\alpha_*=i\beta$
   3) $f(x)=e^{\alpha_0 x}\sin\beta x\cdot P_n(x)+e^{\alpha_0 x}\cos\beta x Q_m(x)$ $\Rightarrow$ $\alpha_*=\alpha_0+i\beta$

Возможны следующие ситуации:

1) Пусть $\alpha_1\neq\alpha_2$ — корни характеристического уравнения
   $\alpha^2+p\alpha+q=0$
   а) Если $\alpha_*\neq\alpha$; $\alpha_*\neq\alpha_2$, то $\bar{y}=e^{\alpha_0 x}\sin\beta x\cdot\tilde{P}_n(x)+e^{\alpha_0 x}\cos\beta x Q_{n_0}(x)$,
   $n_0=max\{n,m\}$
   б) Если $\alpha_*=\alpha_1$ или $\alpha_*=\alpha_2$, то возникает явление резонанса, и тогда в нашем выражении появляется дополнительный множитель x :
   $\bar{y}=x(e^{\alpha_0 x}\sin\beta x\tilde{P}_{n_0}(x)+e^{\alpha_0 x}\cos\beta x\tilde{Q}_{n_0}(x))$

2) Если $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{-p}{2}$, то
   а) $\alpha_*\neq\dfrac{-p}{2}$ $\Rightarrow$ $\bar{y}=e^{\alpha_0 x}\sin\beta x\tilde{P}_{n_0}(x)+e^{\alpha_0 x}\cos\beta x\tilde{Q}_{n_0}(x)$
   б) $\alpha_*=\dfrac{-p}{2}$ $\Rightarrow$ $\bar{y}=x^2(e^{\alpha_0 x}\sin\beta x\tilde{P}_{n_0}(x)+e^{\alpha_0 x}\cos\beta x\tilde{P}_{n_0}(x))$

Примеры:

1) $y''-3y'+2y=e^{-x}(2x+1)$, $\alpha_*=-1$

$\alpha^2-3\alpha+2=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=2\neq-1$, $\alpha_2=1\neq-1$

$\Rightarrow \bar{y}=e^{-e}(Ax+B)$, $A, B-?$

$\bar{y}'=-e^{-x}(Ax+B)+e^{-x}$, $A=e^{-x}(-Ax+A-B)$

$\bar{y}''=-e^{-x}(-Ax+A-B)+e^{-x}(-A)=e^{-x}(Ax+B-2A)$

$e^{-x}(Ax+B-2A)-3e^{-x}(-Ax+A-B)+2e^{-x}(Ax+B)=e^{-x}(2x+1)$

$Ax+B-2A+3Ax-3A+3B+2Ax+2B = 2x+1$

$6A=2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}$

$B-2A-3A+3B+2B = 1 \quad \Rightarrow \quad 6B-\frac{5}{3}=1 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{4}{9}$

$y_{о.н.}=e^{-e}\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\right)+c_1e^{2x}+c_2e^{x}$

2) $y''+y=\sin x \quad \Rightarrow \quad \alpha_*=i$

$\alpha^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2}=\pm i$

$y_{о.о.}=c_1\sin x+c_2\cos x$ $\qquad P_0(x)=1$, $Q_m(x)=0$

$\bar{y}=x(A\,sinx+B\cos x)$, $A, B-?$

$\bar{y}'=(A\sin x+B\cos x)+x(A\cos x-B\sin x)$

$\bar{y}''=(A\cos x-B\sin x)+(A\cos x-B\sin x)+x(-A\sin x-B\cos x) =$

$= 2(A\cos x-B\sin x)-x(A\sin x+B\cos x)$

$2(A\cos x-B\sin x)-x(A\sin x+B\cos x)+x(A\sin x+B\cos x) = \sin x$

$-2B=1$, $2A=0 \quad \Rightarrow \quad A=0, B=-\frac{1}{2}$

$y_{о.н.}=c_1\sin x+c_2\cos x-\frac{x}{2}\cos x$

3) $y''+4y'+4y=e^{-2x}(x-1)$

$\alpha^2+4\alpha+4=0$

$\alpha=-2$

$\bar{y}=x^2e^{-2x}(Ax+B)=e^{-2x}(Ax^3+Bx^2) \quad \Rightarrow$

$\bar{y}'=-2e^{-2x}(Ax^3+Bx^2)+e^{-2x}(3Ax^2+2Bx)=e^{-2x}(-2Ax^3-2Bx^2+3Ax^2+2Bx)$

$\bar{y}''=-2e^{-2x}(-2Ax^3-2Bx^2+3Ax^2+2Bx)+e^{-2x}(-6Ax^2-4Bx+6Ax+2B) =$

$= e^{-2x}(4Ax^3+4Bx^2-6Ax^2-4Bx-6Ax^2-4Bx+6Ax+2B)$

$= e^{-2x}(4Ax^3+4Bx^2-6Ax^2-4Bx-6Ax^2-4Bx+6Ax+2B)$

$+ 4e^{-2x}(-2Ax^3-2Bx^2+3Ax^2+2Bx)+4e^{-2x}(Ax^3+Bx^2) = e^{-2x}(x-1)$

$6Ax+2B=x-1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 6A=1\Rightarrow A=\frac{1}{6} \\ 2B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{2} \end{array}$

$\bar{y}=x^2e^{-2x}(\frac{x}{6}-\frac{1}{2})$

$y_{о.н.}=x^2e^{-2x}\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{2}\right)+e^{-2x}(c_1+c_2x)$

Метод вариации произвольных постоянных для отыскания частного решения y'

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (1)

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ (2)

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения (1), то $\bar{y}$ - частные решения уравнения (2) ищем в виде: $\bar{y}=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

$\bar{y}'=\underbrace{u_1'y_1+u_2'y_2}_{=0}+u_1y_1'+u_2y_2' \quad \Rightarrow \quad \bar{y}''=u_1'y_1'+u_2'y_2'u_1y_1''+u_2y_2''$

$u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2''+p(x)(u_1y_1'+u_2y_2')+q(x)(u_1y_1+u_2y_2) = f(x) \quad \Rightarrow$

$u_1y_1'+u_2'y_2'+u_1L(y_1)+u_2L(y_2)=f(x)$

$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0 \\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x) \end{cases} \quad A=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=W$

$A_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}=-y_2f(x)$

$A_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}=y_1f(x) \quad \Rightarrow \quad u_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-y_2f(x)}{W[y_{1,}y_2]} \quad , \quad u_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{y_1f(x)}{W[y_{1,}y_2]}$

u_1 и u_2 надо находить без произвольных постоянных

Пример: $y''-3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^x}$

$\alpha^2-3\alpha+2=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=2 \quad , \quad \alpha_2=1$

$\Rightarrow \quad y_1=e^{2x}, y_2e^x \quad \Rightarrow \quad \bar{y}=u_1(x)e^{2x}+u_2(x)e^x$

$\begin{cases} u_1'e^{2x}+u_2'e^x=0 \\ u_1'2e^{2x}+u_2'e^x=\frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_1'e^{2x}=\frac{e^x}{1+e^x} \quad \Rightarrow \quad u_1'=\frac{1}{e^x(1+e^x)}$

$u_1=\int\frac{dx}{e^x(1+e^x)}\underbrace{=}_{t=e^x}\int\frac{dt}{t^2(1+t)}$

$\frac{1}{t^2(1+t)} \quad \frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{1+t}=A(1+t)+Bt(1+t)+Ct^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A=1 \\ C=1 \\ B=-1 \end{matrix}$

$u_1=e^{-x}\ln\frac{e^x+1}{e^x}$