Разберём предел вида: 1^{∞} , то есть $\lim_{x\to x_0(\infty)} ?$, если $\lim_{x\to x_0\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to x_0\infty} g(x)=\infty$

Чтобы использовать правила Лопиталя в таких пределах, надо переходить к логарифмам.

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\ln f(x)}\Rightarrow \lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{f(x)^{g(x)}}=e^{f(x)\ln f(x)}=e^{\lim f(x)\ \ln g(x)}$$

Надо произведение превратить в дробь и применить правило Лопиталя

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{x^2}=e^{\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)}{1/x^2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x^2)x^3}{-2(x^2+x+1)(x^2+1)}}=+\infty$$ (при $x\to-\infty$, $x=0$)

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{x^2+1^2}$$

Неопределённость (0^0), то есть $\lim f(x)^{g(x)}$, если $\lim f(x)=0$, $\lim g(x)=0$

Пример

$$\lim_{x\to+0} x^x=\lim_{x\to+0} e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to+0} x\ln x}=e^0=1$$

Достаточный признак экстремума функции

Теорема 1

Пусть в точке $x_0 f'(x_0)=0$, а при переходе через точку $x_0 f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$. Тогда в точке $x_0 y f(x)''$ max (гладкий)
Если производная меняет знак с — на $+$, то тогда

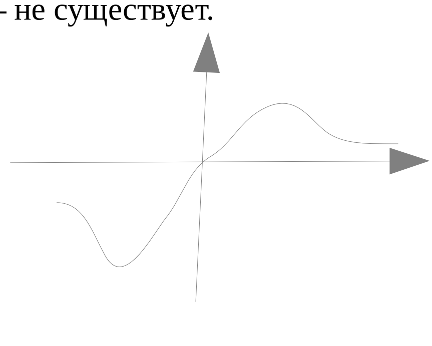
Если $f'(x)$ существует в окрестности точки x_0 , а $f'(x_0)$ — не существует. Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 с $+$ на $-$, то в точке x_0 у $f(x)$ острый max
Если знак меняется с $-$ на $+$, то в точке x_0 острый min

Пример 1

$$y=\sqrt[3]{x(x^2+1)}=x^{7/3}+x^{1/3}$$

$$y'=7/3x^{4/3}+\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{7x^2+1}{3x^{2/3}}>0$$, $x_0=0\Rightarrow y'$ — не существует.

Пример 2



$$y=xe^{-x^2}$$

$$y'=e^{-x^2}—2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$y'=0\ при\ 1-2x^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{(1/2)}$$

Пример 3

$y=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

1) Область определения: $-1\leq\frac{2x}{1+x^2}\leq1$, это неравенство выполняется при любых x

$2x\leq1+x^2\Rightarrow(1-x)^2\geq0$ (верно для $\forall x$)

$2x\geq-(1+x^2)\Rightarrow1+2x+x^2\geq0\Rightarrow(1+x)^2\geq0$ $\forall x$

2) $y'=\frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^2|1-x^2|}=\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}=\left\{\frac{2}{1+x^2}>1-x^2>0\, newlin\frac{2}{1}+x^2\right\}$

$\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x\ 2)^2}=\frac{1+2x^2+x^2-4x^2}{()^2}=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$

$1-x^2>0$

$y=\left\{\begin{matrix}\frac{2}{1+x^2},1-x^2>0\\ \ldots\end{matrix}\right\}$

X	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	-	Не существует	+	Не существует	-
y	Убывает	$\frac{-\pi}{2}$	Возрастает	$\frac{\pi}{2}$	убывает

$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x}{1+x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\arcsin0=0$

$k=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{x}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\Rightarrow y=0$

Вторые производные, и производные более высоких порядков

Пусть на (a,b) задана $f(x)$ такая, что у неё существует $f'(x)$ на (a,b) . Тогда $f'(x)=g(x)$

Определение

Если существует $g'(x_0)$, $x_0 f(a,b)$

то $g'(x_0)=f''(x_0), то есть\, f''(x)=(f'(x))'$

и так далее $f'''(x)=(f'''(x))', f^{IV}(x)=(f''(x))'$
$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$

Пример

1) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$ и так далее
$f^{(n)}(x)=e^x$
2) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)nx^{n-1}$
$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$
$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
и так далее $f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 1=n!$
$f^{(n+1)}(x)=0$ и так далее

Свойства производных высоких порядков